等式

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

が知られている．左辺を見て，右辺を想像することは一見難しい．これを証明するために，以下の問いに答えよ．

(1) $(*)$ の左辺を変形し，近似式

$$(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 \quad (|x|<1)$$

を用いて (a は実数)，その近似値を求めよ．ただし，簡単にするため $5^{-1/3} \fallingdotseq 0.6$ とする．

(2) 3 次方程式

$$x^3+3x-4=0$$

を用いて，上の等式 $(*)$ を証明せよ．

(15 横浜市立大学 医学部 3)

(1) 0.9185 (あるいは 0.9908)

(2) 略

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1) ヒントの近似式が使えるように式変形します．近似式の出どころについては「平均値の定理から Taylor の定理へ」も参照してください．
(2) $(*)$ の左辺が与えられた 3 次方程式の解になっていないだろうか？

【解答】

(1) $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$，$\beta = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ とおくと

$$\alpha = \left\{\sqrt{5}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\beta = 5^{\frac{1}{6}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$a = \dfrac{1}{3}$ とおくと，$(*)$ の左辺は

$$\alpha - \beta = 5^{\frac{1}{6}}(1+x)^a - 5^{\frac{1}{6}}(1-x)^a$$

であり，$|x| < 1$ であるから，与えられた近似式を用いることができる．符号に注意しながら整理すると

$$\begin{aligned}
&\alpha - \beta \\
&\fallingdotseq \left\{1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3\right\} \\
&\qquad - \left\{1 - ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3\right\} \\
&= 5^{\frac{1}{6}}\left\{2ax + \frac{a(a-1)(a-2)}{3}x^3\right\} \\
&= 5^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{5}}\left\{2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right\} \\
&= 5^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{62}{27} \\
&\fallingdotseq \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{62}{27} \quad \left(\because\ 5^{-\frac{1}{3}} \fallingdotseq 0.6\right) \\
&= \frac{124}{135} \\
&= \mathbf{0.9185\cdots} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

という近似値が得られる．

- 計算の仕方を変える．

$\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$，$\beta = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ とおくと，$(*)$ の左辺は

$$\begin{aligned}
\alpha - \beta &= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \\
&= \frac{(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)}{\alpha^2+\sqrt[3]{5-2^2}+\beta^2} \\
&= \frac{4}{\alpha^2+\beta^2+1} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで，

$$\alpha^2 = (\sqrt{5}+2)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\beta^2 = 5^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$\longleftarrow$ $|x| < 1$ に注意し，ヒントの式が使えるように α，β を変形する．
すなわち，$x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のときは，
$0 < x < 1$，
$-1 < -x < 0$
であり
$(1+x)^a$，
$\{1+(-x)\}^a$
に対してヒントの近似式を用いることができる．

$\longleftarrow$ ここで $5^{-\frac{1}{3}}$ が登場する．

$\longleftarrow$ 公式
$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
を使う．

$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$a=\dfrac{2}{3}$ とおいて，近似式を用いると

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2\\
&\fallingdotseq 5^{\frac{1}{3}}\left\{1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3\right\}\\
&\quad+5^{\frac{1}{3}}\left\{1-ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2-\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3\right\}\\
&=5^{\frac{1}{3}}\{2+a(a-1)x^2\}\\
&=5^{\frac{1}{3}}\left\{2+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\right\}\\
&=5^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{82}{45}\\
&\fallingdotseq\frac{5}{3}\cdot\frac{82}{45}\qquad\left(\because\ 5^{-\frac{1}{3}}\fallingdotseq 0.6=\frac{3}{5}\text{ より }5^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\right)\\
&=\frac{82}{27}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，

$$\alpha-\beta=\frac{4}{\frac{82}{27}+1}=\frac{108}{109}=0.9908\cdots$$

という近似値が得られる．

- $\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$ として近似式を用いるよりも，$\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$ として近似式を用いる方が良い近似 (1 に近い値) が得られたわけであるが，近似の値は (計算ミスがなければ) 採点には無関係であろう．

(2) $t=\alpha-\beta$ とおくと

$\longleftarrow$ $\alpha-\beta$ と方程式 $x^3+3x-4=0$ との関係を探る．

$$
\begin{aligned}
t^3&=(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)\\
&=4-3\cdot1\cdot(\alpha-\beta)\\
&=4-3t
\end{aligned}
$$

であり，t は 3 次方程式

$$x^3+3x-4=0 \qquad \cdots\cdots (**)$$

の実数解である．一方，$(**)$ は

$$(x-1)(x^2+x+4)=0$$

より，解は

$$x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{2}$$

$\longleftarrow$ 解は実数解 1 個と虚数解 2 個．

である．$(**)$ の実数解は 1 のみであるから

$$t=1$$

すなわち $(*)$ が成り立つ．

- $(*)$ の左辺は，3 次方程式 $(**)$ を「カルダノの公式」を用いて解いたときに現れる実数解の形である．09 年東北大後期 [3] に類題がある．