次の問いに答えなさい．

(1) 3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．

(a) $p,\ q$ を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を用いて表しなさい．

(b) $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$ を $p,\ q$ を用いて表しなさい．

(2) 次の式を因数分解しなさい．

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$$

(15 福島大 人文社会 3)

【答】

(1) (a) $p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ q=-\alpha\beta\gamma$

(b) $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=p^2$

(2) $-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$

【解答】

(1) (a) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $x^3+px+q=0$ の 3 つの解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p\\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases}$$

が成り立つ．したがって

$$\boldsymbol{p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ q=-\alpha\beta\gamma} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(b) (a) が使えるように式変形すると

$$\begin{aligned}&\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2\\ &=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)\\ &=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha)\\ &=p^2-2(-q)\cdot 0\\ &=\boldsymbol{p^2}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) x について式を整理すると

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(y-z)x^3-(y^3-z^3)x+yz(y^2-z^2)\\ &=(y-z)\{x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\} \qquad \cdots\cdots ㋐\end{aligned}$$

ここで，$\alpha=y,\ \beta=z,\ \gamma=-(y+z)$ とおくと

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=yz-z(y+z)-y(y+z)=-(y^2+yz+z^2)\\ -\alpha\beta\gamma=yz(y+z)\end{cases}$$

であるから

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)$$

すなわち

$$x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)=(x-y)(x-z)(x+y+z)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(y-z)\cdot(x-y)(x-z)(x+y+z)\\ &=\boldsymbol{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (2) の解法は，少々強引に (1) と関連付けている．次のように考えるのが普通だろう．
- $f(x) = x^3 - (y^2 + yz + z^2)x + yz(y+z)$ とおくと

$$f(y) = 0 \text{ かつ } f(z) = 0$$

であり，$f(x)$ は $(x-y)(x-z)$ で割り切れる．これを利用して

$$f(x) = (x-y)(x-z)(x+y+z)$$

としてもよい．
- ㋐ から先は次数の低い文字について整理するという方針で式変形してもよい．
  第 2 因子を y について整理して

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (y-z)\{(z-x)y^2 + (z^2 - zx)y + x^3 - z^2x\} \\
&= (y-z)(z-x)\{y^2 + zy - x(z+x)\} \\
&= (y-z)(z-x)\{(y-x)z + y^2 - x^2\} \quad (z \text{ について整理した}) \\
&= (y-z)(z-x)(y-x)(z+y+x) \\
&= -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)
\end{aligned}$$

となる．