

条件  $p_1, p_2, q_1, q_2$  の否定をそれぞれ  $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{q_1}, \overline{q_2}$  と書く.

(1) 次の  に当てはまるものを, 下の ①~③ のうちから一つ選べ.

命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \implies (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は  である.

①  $(\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2}) \implies (\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2})$

②  $(\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2}) \implies (\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})$

③  $(\overline{q_1} \text{ かつ } \overline{q_2}) \implies (\overline{p_1} \text{ かつ } \overline{p_2})$

④  $(\overline{p_1} \text{ かつ } \overline{p_2}) \implies (\overline{q_1} \text{ かつ } \overline{q_2})$

(2) 自然数  $n$  に対する条件  $p_1, p_2, q_1, q_2$  を次のように定める.

$p_1$  :  $n$  は素数である

$p_2$  :  $n + 2$  は素数である

$q_1$  :  $n + 1$  は 5 の倍数である

$q_2$  :  $n + 1$  は 6 の倍数である

30 以下の自然数  $n$  のなかで  と  は

命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \implies (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」

の反例となる.

(15 センター本試 I・A 2(1))

| ア | イ | ウエ |
|---|---|----|
| 1 | 3 | 29 |

解答は次のページにあります.

## 【チェック・チェック】

13年のセンター本試 2(1) にも対偶，反例を扱った問題が出題されています。

(1) で対偶をとったので (2) でこれを使うというわけではなさそうです。

「または」よりは「かつ」の方が条件がきついで、(2) については、「かつ」で与えられている前提条件を対偶をとって「または」にするのではなく、素直に命題「 $p \implies q$ 」の反例，すなわち、「 $p$ であるのに  $q$  でない」となる例をみつけましょう。

### 【解答】

(1) 命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \implies (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は

$$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)} \implies \overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)}$$

$$\iff \overline{(q_1 \text{ または } q_2)} \implies \overline{(p_1 \text{ または } p_2)}$$

①  
ア

(2) 命題「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \implies (\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)$ 」…… (\*) の反例をみつけるには

$$\text{「}(p_1 \text{ かつ } p_2) \text{ であるのに } (\overline{q_1} \text{ かつ } q_2) \text{ でない」}$$

すなわち

$$\text{「}(p_1 \text{ かつ } p_2) \text{ であるのに } (q_1 \text{ または } \overline{q_2}) \text{ である」}$$

ような 30 以下の自然数  $n$  をみつければよい。

条件  $p_1, p_2, q_1, q_2$  は

$p_1$  :  $n$  は素数である

$p_2$  :  $n + 2$  は素数である

$q_1$  :  $n + 1$  は 5 の倍数である

$q_2$  :  $n + 1$  は 6 の倍数である

より，条件  $p_1$  を満たす  $n$  は

$$n = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

であり，条件「 $p_1$  かつ  $p_2$ 」を満たす  $n$  は

$$n = 1, 3, 5, 11, 17, 29 \quad \dots \text{①}$$

である。①のうち条件  $q_1$  を満たすのは

$$n = 29$$

であり，①のうち条件  $\overline{q_2}$  を満たすのは

$$n = 5$$

である。

よって，(\*) の反例は 3 と 29 である。

イ

ウエ

← 命題「 $p \implies q$ 」の対偶は「 $\overline{q} \implies \overline{p}$ 」である。

← 「 $p$  かつ  $q$ 」の否定「 $\overline{p}$  かつ  $\overline{q}$ 」は「 $\overline{p}$  または  $\overline{q}$ 」である。

← 命題「 $p \implies q$ 」に対し「 $p$ であるのに  $q$  でない」となる例を反例という。

← 反例を見つけるための候補が決まった。