容器 A には濃度 10 % の食塩水が 100 g，容器 B には濃度 6 % の食塩水が 50 g 入っている．このとき，次の操作を考える．

【操作】A から食塩水 10 g，B から食塩水 10 g をそれぞれ取り出した後，A から取り出した食塩水を B へ入れ，B から取り出した食塩水を A へ入れてそれぞれの容器をよく混ぜる．

この操作を n 回 $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 繰り返した後の容器 A，容器 B に含まれる食塩の量をそれぞれ a_n g，b_n g とすると，$a_1 = \boxed{\text{セ}}$ であり，$a_n + b_n$ は n によらず一定値 $\boxed{\text{ソ}}$ である．従って，a_{n+1} と a_n の間の関係式を b_n を用いずに表すと，$a_{n+1} = \boxed{\text{タ}}a_n + \boxed{\text{チ}}$ が成り立つ．これより，操作を n 回繰り返した後の容器 A の濃度を n を用いて表すと $\boxed{\text{ツ}}$% となる．

(15 茨城大 後 工 2)

【答】

セ	ソ	タ	チ	ツ
$\dfrac{48}{5}$	13	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{13}{5}$	$\dfrac{1}{150}\left\{13 + 2\left(\dfrac{7}{10}\right)^n\right\}$

【解答】

最初は容器 A には濃度 10 % の食塩水が 100 g，容器 B には濃度 6 % の食塩水が 50 g 入っているから，最初の A，B の食塩量はそれぞれ 10 g，3 g である．

このとき，1 回の操作の後の A の食塩量は

$$\begin{aligned} a_1 &= (\text{残っている食塩量}) + (\text{入ってくる食塩量}) \\ &= \frac{9}{10} \times 10 + \frac{1}{5} \times 3 \\ &= \boxed{\frac{48}{5}} \end{aligned}$$

…… (セの答)

いま，A，B 合わせた食塩の総量は変わらないから，n によらず一定であり

$$a_n + b_n = \boxed{13} \quad \cdots\cdots ①$$

…… (ソの答)

また，$n + 1$ 回の操作後は

$$a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + \frac{1}{5}b_n$$

であり，①を代入すると

$$a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + \frac{1}{5}(13 - a_n)$$

$$a_{n+1} = \boxed{\frac{7}{10}}a_n + \boxed{\frac{13}{5}}$$

…… (タ，チの答)

が成り立つ．$\alpha = \dfrac{7}{10}\alpha + \dfrac{13}{5}$ の解 $\alpha = \dfrac{26}{3}$ を用いると，これは次のように変形される．

$$a_{n+1} - \frac{26}{3} = \frac{7}{10}\left(a_n - \frac{26}{3}\right)$$

数列 $\left\{a_n - \dfrac{26}{3}\right\}$ は初項 $a_1 - \dfrac{26}{3} = \dfrac{48}{5} - \dfrac{26}{3} = \dfrac{14}{15}$，公比 $\dfrac{7}{10}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{26}{3} = \frac{14}{15}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{26}{3} + \frac{4}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{n}$$

よって，操作を n 回繰り返した後の容器 A の濃度は

$$\frac{a_n}{100} = \boxed{\frac{1}{150}\left\{13 + 2\left(\frac{7}{10}\right)^{n}\right\}}\,\% \qquad \cdots\cdots \text{(ツの答)}$$

となる．