

## 後期：理 学 部

**1**  $a$  を実数とする。 $xy$  平面において、関数  $y = x^2$  と  $y = -x^2 + 2ax - a$  のグラフをそれぞれ  $C_1, C_2$  とする。

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  が共有点をもたないような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2)  $a$  が (1) で求めた範囲にあるとき、 $C_1$  と  $C_2$  の両方に接する直線が 2 本存在することを示せ。
- (3)  $a$  が (1) で求めた範囲を動くとき、 $C_1$  と  $C_2$  の両方に接する 2 本の直線の交点が描く図形を図示せよ。

**2**  $a, b$  を実数とする。 $xy$  平面において、連立不等式

$$3x - 4y + 4 \geq 0, \quad 4x + 3y - 28 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

の表す領域を  $D$  とし、不等式  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1$  の表す領域を  $E$  とする。

- (1)  $E$  のすべての点が  $D$  の点となるような点  $(a, b)$  全体のなす図形の面積を求めよ。
- (2)  $E$  のいずれかの点が  $D$  の点となるような点  $(a, b)$  全体のなす図形の面積を求めよ。

3 サイコロを 4 回投げて出た目の数を順に  $a, b, c, d$  とする。

(1)  $ab + cd = 6$  が成り立つ確率を求めよ。

(2)  $ab - cd = 1$  が成り立つ確率を求めよ。

4  $-1 < x < 1$  の範囲で定義された関数  $f(x)$  で、次の 2 つの条件を満たすものを考える。

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1)$$

$f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能で、そこでの微分係数は 1 である

(1)  $-1 < x < 1$  に対し  $f(x) = -f(-x)$  が成り立つことを示せ。

(2)  $f(x)$  は  $-1 < x < 1$  の範囲で微分可能であることを示し、導関数  $f'(x)$  を求めよ。

(3)  $f(x)$  を求めよ。

5

$\alpha, \beta, \gamma$  を複素数として、 $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$  とおく。実部と虚部がどちらも整数である複素数全体の集合を  $R$  とする。また、 $i$  を虚数単位とする。

(1) 次の 2 条件 (a), (b) は同値であることを示せ。

(a) すべての整数  $n$  に対し、 $f(n)$  は  $R$  の要素である。

(b)  $2\alpha, \beta - \alpha, \gamma$  はすべて  $R$  の要素である。

(2)  $x$  が  $R$  の要素ならば、 $\frac{x(x+1)}{1-i}$  は  $R$  の要素であることを示せ。

(3) 次の 2 条件 (c), (d) は同値であることを示せ。

(c) すべての  $R$  の要素  $x$  に対し、 $f(x)$  は  $R$  の要素である。

(d)  $(1-i)\alpha, \beta - \alpha, \gamma$  はすべて  $R$  の要素である。

6

$n$  を自然数とし、

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad J_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n} + 1) dx$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 実数  $t \geq 0$  に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\right) \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数  $\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n} + 1)$  を求めよ。

(4) 極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n)$  を求めよ。