次の問いに答えよ．

(1) $980x$ を 2016 で割った余りが 28 となる整数 $x$ は存在するか．理由をつけて答えよ．

(2) $1000x$ を 2016 で割った余りが 28 となる整数 $x$ は存在するか．理由をつけて答えよ．

(3) 自然数 $n$ に対し，$1+2+\cdots+n$ を $n$ で割った余りを求めよ．

(4) 1 個のさいころを 3 回続けて投げて出た目の数を掛け合わせる．このとき得られた数を 3 で割ったら 1 余る確率を求めよ．

(16 広島大 後期 総合科学 (理系) 2)

---

【答】

(1) 存在する．理由は略．

(2) 存在しない．理由は略．

(3) $n$ が奇数のとき 0，$n$ が偶数のとき $\dfrac{n}{2}$

(4) $\dfrac{4}{27}$

---

【解答】

(1) $980x$ を 2016 で割った余りが 28 となる整数 $x$ の存在を仮定すると

$$980x = 2016p + 28$$

を満たす整数 $p$ が存在する．$980 = 28 \cdot 35$，$2016 = 28 \cdot 72$ であるから，両辺を 28 で割ると

$$35x = 72p + 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$35(x-2p) - 2p = 1$$

これを満たす整数の組 $(x-2p,\ p)$ の 1 つとして $(1,\ 17)$ があるから

$$\begin{cases} x-2p=1 \\ p=17 \end{cases} \qquad \therefore \quad p=17,\ x=35$$

よって，$980x$ を 2016 で割った余りが 28 となる整数 $x$ は存在する． ……(証明終わり)

- $a,\ b$ が互いに素であるとき

$$ax + by = 1$$

を満たす整数 $x,\ y$ が存在するという基本定理がある (証明は，$a,\ b$ での互除法の計算を逆にたどればよい)．

これを用いると①，すなわち

$$35x - 72p = 1$$

は，$35 = 5 \cdot 7$，$72 = 2^3 \cdot 3^2$ であり，35 と 72 は互いに素であるから，①を満たす整数 $x$ と $p$ は存在する．したがって

$$35 \cdot 28x - 72 \cdot 28p = 28$$

$$\therefore \quad 980x = 2016p + 28$$

を満たす整数 $x$ は存在する．

(2) $1000x$ を 2016 で割った余りが 28 となる整数 $x$ の存在を仮定すると

$$1000x = 2016q + 28$$

を満たす整数 $q$ が存在する．$1000 = 2^3 5^3$，$2016 = 2^5 3^2 7$，$28 = 2^2 7$ であるから，両辺を 4 で割って

$$250x = 504q + 7$$
$$2(125x - 252q) = 7$$

$x$ と $q$ が整数のとき，左辺は偶数，右辺は奇数だからこれは不合理である．
よって，$1000x$ を 2016 で割った余りが 28 となる整数 $x$ は存在しない．

…… (証明終わり)

(3) $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ とおくと

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) = n \cdot \frac{n+1}{2}$$

$n$ の偶奇で場合分けする．

(i) $n = 2m - 1$ ($m$ は自然数) のとき；

$$S_n = (2m-1) \cdot \frac{(2m-1)+1}{2} = (2m-1) \cdot m = nm$$

したがって，$S_n$ は $n$ $(= 2m-1)$ で割り切れる．

(ii) $n = 2m$ ($m$ は自然数) のとき；

$$S_n = 2m \cdot \frac{2m+1}{2} = 2m^2 + m = 2m \cdot m + m = nm + m$$

したがって，$S_n$ を $n$ $(= 2m)$ で割った余りは $m = \dfrac{n}{2}$ である．

よって，$1 + 2 + \cdots + n$ を $n$ で割った余りは

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \text{ が奇数のとき} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{n} \text{ が偶数のとき} & \boldsymbol{\dfrac{n}{2}} \end{cases}$$

……(答)

(4) さいころの目 1 から 6 を 3 で割った余りで分ける．
余りが $r$ $(r = 0,\ 1,\ 2)$ のさいころの目の集合を $A_r$ とすると

$$A_0 = \{3,\ 6\}, \quad A_1 = \{1,\ 4\}, \quad A_2 = \{2,\ 5\}$$

である．1 個のさいころを 3 回続けて投げて，出た目の数の積を 3 で割った余りが 1 となるのは

3 回とも集合 $A_1$
あるいは
1 回が集合 $A_1$，2 回が集合 $A_2$

の要素の目のときである．

1 個のさいころを 1 回投げたとき，集合 $A_0$，$A_1$，$A_2$ の目が出る確率はそれぞれ $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{4}{27}}$$

……(答)