自然数 n に対して，n のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和を $S(n)$ とおく．例えば，$S(9)=1+3+9=13$ である．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)=2n$ を満たす n をすべて求めよ．

(2) a を自然数とする．$n=2^a-1$ が $S(n)=n+1$ を満たすとき，a は素数であることを示せ．

(3) a を 2 以上の自然数とする．$n=2^{a-1}(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき，n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ．

(16 東京医歯大 医 1)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 略

【解答】

(1) $n=p^2q$ (p と q は異なる素数) のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和 $S(n)$ は

$$S(n)=(1+p+p^2)(1+q)$$

であり

$$S(n)=2n \iff (1+p+p^2)(1+q)=2p^2q \qquad \cdots\cdots ①$$

$1+p+p^2=p(p+1)+1$ は 3 以上の奇数で，p と互いに素，かつ $2p^2q$ の約数であるから

$$1+p+p^2=q$$

である．①に代入して

$$1+q=2p^2$$

2 式から q を消去すると

$$1+p+p^2=2p^2-1$$

$$p^2-p-2=0$$

$$(p+1)(p-2)=0$$

$p>0$ より

$$p=2,\ q=1+2+2^2=7$$

$$\therefore\quad n=2^2\cdot 7=\mathbf{28} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 背理法を用いる．
a は素数でない，すなわち，$a=1$ または合成数であると仮定する．

(i) $a=1$ と仮定すると，$n=2^1-1=1$ である．このとき $S(n)=1$ であるが，これは $S(n)=n+1$ を満たさない．

(ii) a が合成数であると仮定すると，$a = pq$ (p, q はいずれも 2 以上の自然数) とおくことができる．このとき

$$\begin{aligned} n &= 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q \\ &= (2^p - 1)\{(2^p)^{q-1} + \cdots + 2^p + 1\} \end{aligned}$$

であり

$$2^p - 1 > 1, \quad (2^p)^{q-1} + \cdots + 2^p + 1 > 1$$

であるから，n は合成数である．

一方，$n = 2^{pq} - 1$ より $n > 1$ であり，1, n は n の約数である．1, n 以外の約数があるとすると $S(n) > n + 1$ となり，$S(n) = n + 1$ に反する．すなわち，n の約数は 1, n のみである．したがって，n は素数である．これは n が合成数であることに反する．

(i)，(ii) より，a は素数である． ……(証明終わり)

(3) $a \geqq 2$ より，2^{a-1} と $2^a - 1$ は互いに素であり

$$\begin{aligned} S(n) &= S(2^{a-1}(2^a - 1)) \\ &= (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{a-1})S(2^a - 1) \\ &\geqq (2^a - 1)\{1 + (2^a - 1)\} \quad (\text{等号は } 2^a - 1 \text{ が素数のとき成り立つ}) \\ &= (2^a - 1) \cdot 2^a \\ &= 2 \cdot 2^{a-1}(2^a - 1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S(n) \geqq 2n$$

一方，$S(n) \leqq 2n$ であるから

$$S(n) = 2n$$

が成り立つ．等号が成立するから，$2^a - 1$ は素数であり，(2) より a は素数である．

$n = 2^{b-1}(2^b - 1)$ ($n \geqq 2$) として 1 の位の数を調べると

b	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
2^{b-1}の 1 の位の数	2	4	8	6	2	4	8	6	$\cdots$
$2^b - 1$ の 1 の位の数	3	7	5	1	3	7	5	1	$\cdots$
n の 1 の位の数	6	8	0	6	6	8	0	6	$\cdots$

であり，n の 1 の位の数は周期 4 である．

a は素数より，n の 1 の位の数として現れるのは

$a = 2$ のときの値と，$4k + 3$, $4k + 1$ (k は整数) タイプの素数のときの値

である．

$$a = 2, \ 3, \ 5$$

のときの n の 1 の位の数はそれぞれ 6, 8, 6 であるから，n の 1 の位の数は

6 か 8 ……(証明終わり)

である．

- n の 1 の位の数は周期が 4 であることの証明．
  $n(b) = 2^{b-1}(2^b - 1)$ とすると
  $$\begin{aligned} n(b+4) - n(b) &= 2^{b+3}(2^{b+4} - 1) - 2^{b-1}(2^b - 1) \\ &= 16 \cdot 2^{b-1}(16 \cdot 2^b - 1) - 2^{b-1}(2^b - 1) \\ &= 2^b(255 \cdot 2^b - 15) \\ &= 2^b \cdot 15(17 \cdot 2^b - 1) \\ &= 10 \cdot 3 \cdot 2^{b-1}(17 \cdot 2^b - 1) \end{aligned}$$
  よって，$n(b+4)$ と $n(b)$ の 1 の位の数の等しい．
- $S(n) = 2n$ を満たすとき，n の約数のうち n 以外のものの和は n に等しい．このような数を完全数という．