自然数 n に対して，n のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和を $S(n)$ とおく．例えば，$S(9)=1+3+9=13$ である．このとき以下の各問いに答えよ．

(1) n が異なる素数 p と q によって $n=pq$ と表されるとき，$S(n)=24$ を満たす n をすべて求めよ．

(2) n が異なる素数 p と q によって $n=pq$ と表されるとき，$S(n)\geqq 2n$ を満たす n をすべて求めよ．

(3) n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)\geqq 2n$ を満たす n をすべて求めよ．

(16 東京医歯大 歯 1)

【答】

(1) 14, 15
(2) 6
(3) 12, 18, 20, 28

【解答】

(1) $n=pq$ (p と q は異なる素数) のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和 $S(n)$ は

$$S(n)=1+p+q+pq=(1+p)(1+q)$$

であり

$$S(n)=24 \iff (1+p)(1+q)=2^3\cdot 3$$

$p,\ q$ の対称性から $2\leqq p<q$ としても一般性を失わない．$3\leqq 1+p<1+q$ から

$$(1+p,\ 1+q)=(3,\ 8),\ (4,\ 6)$$
$$(p,\ q)=(2,\ 7),\ (3,\ 5)$$

このとき，$p,\ q$ はともに素数であり条件を満たす．

よって，　$n=pq=\mathbf{14,\ 15}$ ……(答)

(2) $S(n)=1+p+q+pq$ より

$$\begin{aligned} S(n)\geqq 2n &\iff 1+p+q+pq\geqq 2pq \\ &\iff (p-1)(q-1)\leqq 2 \end{aligned}$$

$p,\ q$ の対称性から $1\leqq p-1<q-1$ としても一般性を失わない．

$$(p-1,\ q-1)=(1,\ 2)$$
$$(p,\ q)=(2,\ 3)$$

このとき，$p,\ q$ はともに素数であり条件を満たす．

よって，　$n=pq=\mathbf{6}$ ……(答)

(3) $n=p^2q$ (p と q は異なる素数) のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和 $S(n)$ は

$$S(n)=(1+p+p^2)+(q+pq+p^2q)$$

であり

$$\begin{aligned} S(n)\geqq 2n &\iff 1+p+p^2+q+pq+p^2q\geqq 2p^2q \qquad \cdots\cdots ① \\ &\iff p^2q\leqq 1+p+p^2+q+pq \end{aligned}$$

両辺を p^2q で割ると

$$\begin{aligned} 1 &\leqq \frac{1}{p^2q}+\frac{1}{pq}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p} \\ &\leqq \frac{1}{4p}+\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}+\frac{1}{p} \quad (\because\ p \geqq 2,\ q \geqq 2) \\ \therefore\quad \frac{1}{2} &\leqq \frac{9}{4p} \qquad \therefore\quad p \leqq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

p は素数であるから，$p=2,\ 3$ に限る．
$p=2$ のとき；①より

$$4q \leqq 7+3q \qquad \therefore\quad q \leqq 7$$

q は $p=2$ と異なる素数だから $q=3,\ 5,\ 7$
$p=3$ のとき；①より

$$9q \leqq 13+4q \qquad \therefore\quad q \leqq \frac{13}{5}$$

q は $p=3$ とは異なる素数だから $q=2$
以上から $(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (2,\ 5),\ (2,\ 7)$

$$n=p^2q=\mathbf{12,\ 18,\ 20,\ 28}$$ ……(答)