自然数 n のすべての正の約数の和を表す関数を $f(n)$，正の約数の個数を表す関数を $g(n)$ とおく．ただし，1 および n も n の正の約数であり $f(1)=g(1)=1$ とする．例えば，$n=12$ のとき，n の正の約数は 1，2，3，4，6，12 なので

$$f(12)=1+2+3+4+6+12=28,\ g(12)=6$$

である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(24)$，$g(24)$ の値を求めよ．
(2) $g(n)$ の値が奇数となる n は，ある自然数の平方であることを証明せよ．

以下の問題では，n は偶数とする．

(3) m を正の整数とし，$n=2^{m-1}(2^m-1)$ とおく．このとき，2^m-1 が素数ならば $f(n)=2n$ となることを証明せよ．
(4) 平方数ではない偶数 n が $f(n)=2n$ を満たしているとする．このとき，n のすべての正の約数の逆数の和はある一定の数に等しいことを示し，その数を求めよ．

(16 浜松医大 1)

【答】

(1) $f(24)=60$，$g(24)=8$
(2) 略
(3) 略
(4) 証明略，2

【解答】

(1) $24=2^3\cdot 3$ より，24 の約数は

$$2^k3^l\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ l=0,\ 1)$$

と表されるから

$$f(24)=(1+2+2^2+2^3)(1+3)=15\times 4=\mathbf{60} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$g(24)=4\cdot 2=\mathbf{8} \quad \cdots\cdots(答)$$

- n が $n=p^aq^br^c$ $(a\geqq 1,\ b\geqq 1,\ c\geqq 1)$ と素因数分解されるとき

$$f(n)=(1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)(1+r+\cdots+r^c)$$
$$g(n)=(a+1)(b+1)(c+1)$$

が成り立つ．

(2) $n=1$ のとき，$g(n)=1=$ (奇数) で，n は 1 の平方であるから成り立つ．
$n\geqq 2$ のとき，n を素因数分解し

$$n={p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2}\cdots{p_m}^{a_m} \quad \cdots\cdots ①$$

とおく．ただし，m は自然数，p_1，p_2，$\cdots$，p_m は異なる素数，a_1，a_2，$\cdots$，a_m は自然数である．

$$g(n)=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_m+1)$$

$g(n)$ が奇数になるのは a_1+1，a_2+1，$\cdots$，a_m+1 がすべて奇数になるとき，すなわち a_1，a_2，$\cdots$，a_m がすべて偶数になるときである．このとき

$$n=\left(p_1{}^{\frac{a_1}{2}}p_2{}^{\frac{a_2}{2}}\cdots p_m{}^{\frac{a_m}{2}}\right)^2$$

より，n は自然数 $p_1{}^{\frac{a_1}{2}}p_2{}^{\frac{a_2}{2}}\cdots p_m{}^{\frac{a_m}{2}}$ の平方である．　……(証明終わり)

(3) $n=2^{m-1}(2^m-1)$ において 2^m-1 が素数のとき，2^{m-1} と 2^m-1 は互いに素であり

$$\begin{aligned}f(n)&=(1+2+\cdots+2^{m-1})\{1+(2^m-1)\}\\&=\frac{2^m-1}{2-1}\cdot 2^m\\&=2^m(2^m-1)\\&=2n\end{aligned}$$

……(証明終わり)

(4) n は偶数であるから，$n\geqq 2$ より，①のときを考える．$N=g(n)$ として，n の正の約数を小さい順に b_1，b_2，$\cdots$，b_N とおくと

$$n=b_ic_i\quad(c_i\text{は自然数},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

と書ける．このとき，c_i も n の正の約数であるから，c_i は b_1，b_2，$\cdots$，b_N のどれかであり

$$b_1<b_2<\cdots<b_N,\quad c_1>c_2>\cdots>c_N$$

より，$c_i=b_{N+1-i}$ である．

よって，n のすべての正の約数の逆数の和は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_N}\\=&\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n}+\cdots+\frac{c_N}{n}\\=&\frac{b_N+b_{N-1}+\cdots+b_1}{n}\\=&\frac{f(n)}{n}\\=&\frac{2n}{n}\\=&2\end{aligned}$$

であり，一定である．　……(証明終わり)

また，求める数は **2** である．　……(答)

- n が平方数の偶数であるときは，$f(n)=2n$ が成り立たない．

  たとえば，$n=(2^a3^b)^2=2^{2a}\cdot 3^{2b}$ とすると

$$\begin{aligned}f(n)&=(1+2+\cdots+2^{2a})(1+3+\cdots+3^{2b})\\&=(\text{奇数})\times(1+\text{偶数})\\&=\text{奇数}\end{aligned}$$

  となり，$f(n)=2n$ が成り立たない．