複素数平面上で，等式

$$\frac{z-1}{z+1}=\left|\frac{z-1}{z+1}\right|i$$

を満たす点 $z$ 全体が表す図形を求め，その図形を複素数平面上に図示せよ．ただし，$i$ は虚数単位で，複素数 $w$ に対して $|w|$ は $w$ の絶対値を表す．

この問題については，答えだけではなく，答えを導く過程も書くこと．

(16 学習院大 理 3)

---

【答】 略

---

【解答】

$$\frac{z-1}{z+1}=\left|\frac{z-1}{z+1}\right|i \iff \begin{cases}\dfrac{z-1}{z+1}\text{の実部}=0 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{z-1}{z+1}\text{の虚部}=\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned}
① &\iff \frac{1}{2}\left\{\frac{z-1}{z+1}+\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}\right\}=0 \\
&\iff \begin{cases}(z-1)(\overline{z}+1)+(z+1)(\overline{z}-1)=0 \\ z+1\neq 0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}z\overline{z}-1=0 \\ z\neq -1\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}|z|=1 \\ z\neq -1\end{cases}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
② &\iff \frac{1}{2i}\left\{\frac{z-1}{z+1}-\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}\right\}=\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \\
&\iff \begin{cases}\dfrac{1}{2i}\{(z-1)(\overline{z}+1)-(z+1)(\overline{z}-1)\}=|(z-1)(\overline{z}+1)| \\ z+1\neq 0\end{cases} \\
&\iff \begin{cases}\dfrac{z-\overline{z}}{i}=|z\overline{z}+z-\overline{z}-1| \\ z\neq -1\end{cases}
\end{aligned}$$

であるから

$$\text{「①かつ②」} \iff \begin{cases}|z|=1 \\ \dfrac{z-\overline{z}}{i}=|z-\overline{z}| \\ z\neq -1\end{cases}$$

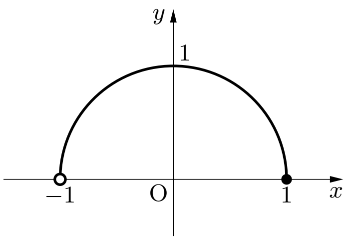
である．

$$\begin{aligned}
\frac{z-\overline{z}}{i}=|z-\overline{z}| &\iff \frac{z-\overline{z}}{2i}=\left|\frac{z-\overline{z}}{2i}\right| \\
&\iff (z\text{ の虚部})=|z\text{ の虚部}| \\
&\iff (z\text{ の虚部})\geqq 0
\end{aligned}$$

より，$z$ の条件は

$$\begin{cases} |z|=1 \\ (z\text{ の虚部}) \geqq 0 \\ z \fallingdotseq -1 \end{cases}$$

であり，図示すると右図の太線部分となる．




- $$\frac{z-1}{z+1} = \left|\frac{z-1}{z+1}\right| i$$

$$\iff \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \left|\frac{z-1}{z+1}\right| i$$

$$\iff \begin{cases} z\overline{z}+z-\overline{z}-1 = |z^2-1|\, i \\ z+1 \fallingdotseq 0 \end{cases}$$

$z=x+yi$ ($x$, $y$ は実数) とおくと

$$z\overline{z}+z-\overline{z}-1 = |z^2-1|\, i$$

$$\iff (x^2+y^2)+2yi-1 = |(x^2-y^2+2xyi)-1|i$$

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ 2y = |x^2-y^2-1+2xyi| \end{cases}$$

ここで，$x^2=1-y^2$ より

$$\begin{aligned} |x^2-y^2-1+2xyi| &= \sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2} \\ &= \sqrt{(-2y^2)^2+4(1-y^2)y^2} \\ &= \sqrt{4y^2} \\ &= 2|y| \end{aligned}$$

であり

$$2y = 2|y| \iff y \geqq 0$$

よって，求める条件は

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y \geqq 0 \\ x+yi \fallingdotseq -1 \end{cases}$$

これを図示すると【解答】の図を得る．