複素数平面上の 3 点 A(α), W(w), Z(z) は原点 O(0) と異なり,

$$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad w=(1+\alpha)z+1+\overline{\alpha}$$

とする.ただし,$\overline{\alpha}$ は α の共役な複素数とする.2 直線 OW,OZ が垂直であるとき,次の問に答えよ.

(1) $(1+\alpha)\beta+1+\overline{\alpha}=0$ を満たす複素数 β を求めよ.
(2) $|z-\alpha|$ の値を求めよ.
(3) $\triangle$OAZ が直角三角形になるときの複素数 z を求めよ.

(16 山形大 医・理 6)

【答】

(1) $\beta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
(2) $|z-\alpha|=1$
(3) $z=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}\mp1}{2}i$ (複号同順)

【解答】

(1) $\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ は 1 の虚数立方根であり

$$\alpha^3=1,\quad \alpha^2+\alpha+1=0,\quad \overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

を満たすから,$(1+\alpha)\beta+(1+\overline{\alpha})=0$ を変形すると

$$(1+\alpha)\beta+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)=0$$
$$(1+\alpha)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=0$$

$1+\alpha\neq0$ より

$$\beta=-\frac{1}{\alpha}=-\overline{\alpha}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\qquad\cdots\cdots(答)$$

(2) O(0),Z(z),W(w) $(z\neq0,\ w\neq0)$ は,OZ$\perp$OW を満たすから

$$\frac{w}{z}\text{は純虚数}\iff\frac{w}{z}+\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}=0\iff w\overline{z}+\overline{w}z=0\qquad\cdots\cdots ①$$

$w=(1+\alpha)z+1+\overline{\alpha}$ を代入すると

$$\begin{aligned}&w\overline{z}+\overline{w}z\\=&\{(1+\alpha)z+1+\overline{\alpha}\}\overline{z}+\overline{\{(1+\alpha)z+1+\overline{\alpha}\}}z\\=&\{(1+\alpha)z\overline{z}+(1+\overline{\alpha})\overline{z}\}+\{(1+\overline{\alpha})z\overline{z}+(1+\alpha)z\}\\=&(2+\alpha+\overline{\alpha})z\overline{z}+(1+\overline{\alpha})\overline{z}+(1+\alpha)z\}\end{aligned}$$

$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ より $\alpha+1+\overline{\alpha}=0$ であるから

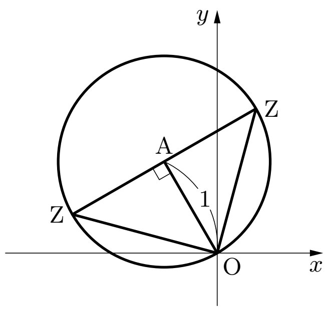
$$\begin{aligned}&w\overline{z}+\overline{w}z\\ =&z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z\\ =&|z-\alpha|^2-\alpha\overline{\alpha}\\ =&|z-\alpha|^2-1\end{aligned}$$

よって

$$① \iff |z-\alpha|^2-1=0$$

$$\therefore \quad |z-\alpha|=\mathbf{1}$$ ……(答)

(3) (2) より，点 $\mathrm{Z}(z)$ は点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．$\mathrm{OA}=|\alpha|=1$ だから，その円は原点 O を通る．したがって $\triangle\mathrm{OAZ}$ が直角三角形のとき



$$\begin{cases}\mathrm{AO}=\mathrm{AZ}=1\\ \angle\mathrm{OAZ}=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

なる直角二等辺三角形である．

よって，Z は A を O のまわりに $\pm\dfrac{\pi}{4}$ 回転して，O を中心に $\sqrt{2}$ 倍した点である．以下，複号同順とする．

$$\begin{aligned}z&=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha\\ &=(1\pm i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &=\boldsymbol{\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}\mp 1}{2}i}\end{aligned}$$ ……(答)

- $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$ と考えると

  $$z=\alpha+(\pm i)(-\alpha)=(1\mp i)\alpha \quad (\text{複号同順})$$

  である．