複素数 z の方程式 $z^4=-8-8\sqrt{3}\,i$ の解をすべて求めよ．

(16 山梨大 工・生命環境 1(2))

【答】 $\pm(1+\sqrt{3}i)$，$\pm(\sqrt{3}-i)$

【解答】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおく．

$$-8-8\sqrt{3}i=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2^4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

より，方程式 $z^4=-8-8\sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=2^4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\quad \begin{cases} r^4=2^4 \\ 4\theta=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\ (k\text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} (r^2-2^2)(r^2+2^2)=0 \\ \theta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\ (k\text{ は整数}) \end{cases}$$

r, θ の範囲により

$$\begin{cases} r=2 \\ \theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{6},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{11\pi}{6} \end{cases}$$

よって，求める解は

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\boldsymbol{1+\sqrt{3}i}$$
$$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\boldsymbol{-\sqrt{3}+i}$$
$$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\boldsymbol{-1-\sqrt{3}i}$$
$$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\sqrt{3}-i}$$

- 解の 1 つ α が分かると，他の解は 1 の原始 4 乗根 (4 乗して初めて 1 となる数) である i を用いて

  $$\alpha,\ \alpha i,\ \alpha i^2,\ \alpha i^3$$

  すなわち

  $$\pm\alpha,\ \pm\alpha i$$

  と表すことができる．

  $\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i$ とすると

  $$\pm(1+\sqrt{3}i),\ \pm(\sqrt{3}-i)$$

  である．