複素数平面上で原点 O と 2 点 A(α)，B(β) を頂点とする △OAB がある．直線 OB に関して点 A と対称な点を C，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，複素数 z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表すものとする．

(1) 点 C(γ) とするとき，$\gamma = \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ であることを示せ．

(2) 辺 AB と直線 DC が平行なとき，△OAB はどのような三角形か．

(16 岐阜薬大 4)

【答】

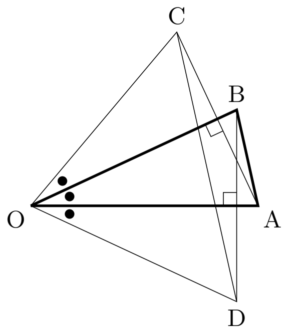
(1) 略

(2) OA=OB の二等辺三角形 または ∠AOB が直角の直角三角形

【解答】

(1) $\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \theta$ とすると

$$\beta = \frac{|\beta|}{|\alpha|}(\cos\theta + i\sin\theta)\alpha$$



である．C は直線 OB に関する点 A の対称点であるから，

$|\gamma| = |\alpha|$ かつ $\arg\dfrac{\beta}{\gamma} = -\theta$ である．したがって

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{|\beta|}{|\alpha|}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}\gamma \\ &= \frac{|\beta|}{|\alpha|}(\cos\theta - i\sin\theta)\gamma \\ &= \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\gamma\end{aligned}$$

である．

よって，$\gamma = \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ である． ……(証明終わり)

- $\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \theta$ とすると

$$\beta = \frac{|\beta|}{|\alpha|}(\cos\theta + i\sin\theta)\alpha$$

であり，C は直線 OB に関する点 A の対称点であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\alpha = (\cos\theta + i\sin\theta)^2\alpha \\ &= \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\alpha = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}\frac{\beta}{\alpha}\cdot\beta\end{aligned}$$

である．ここで

$$\frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}\cdot\frac{|\beta|}{|\alpha|}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{|\alpha|}{|\beta|}\overline{(\cos\theta - i\sin\theta)} = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

よって，$\gamma = \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ である．

(2) D(δ) とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} \mathbin{/\!/} \mathrm{DC} &\iff \frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha} \text{ が実数} \\ &\iff \frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha} = \overline{\left(\frac{\gamma-\delta}{\beta-\alpha}\right)} \\ &\iff (\gamma-\delta)(\overline{\beta}-\overline{\alpha}) = (\overline{\gamma}-\overline{\delta})(\beta-\alpha) \end{aligned}$$

いま，(1) より，$\gamma = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\beta$ であり，同様に，$\delta = \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\alpha$ であるから

$$\left(\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\beta - \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\alpha\right)(\overline{\beta}-\overline{\alpha}) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\overline{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\overline{\alpha}\right)(\beta-\alpha)$$

$$\overline{\alpha}\beta - \frac{\alpha\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}} - \frac{\overline{\alpha}^2\beta}{\overline{\beta}} + \alpha\overline{\beta} = \alpha\overline{\beta} - \frac{\overline{\alpha}\beta^2}{\alpha} - \frac{\alpha^2\overline{\beta}}{\beta} + \overline{\alpha}\beta$$

$$\frac{\alpha\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}} + \frac{\overline{\alpha}^2\beta}{\overline{\beta}} = \frac{\overline{\alpha}\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2\overline{\beta}}{\beta}$$

$$\alpha^2\beta\overline{\beta}^3 + \alpha\overline{\alpha}^3\beta^2 = \overline{\alpha}^2\overline{\beta}\beta^3 + \overline{\alpha}\alpha^3\overline{\beta}^2$$

$$\alpha^2\overline{\beta}^2|\beta|^2 + \overline{\alpha}^2\beta^2|\alpha|^2 = \overline{\alpha}^2\beta^2|\beta|^2 + \alpha^2\overline{\beta}^2|\alpha|^2$$

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\overline{\alpha}^2\beta^2 - \alpha^2\overline{\beta}^2) = 0$$

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta}) = 0$$

よって，

$$|\alpha| = |\beta| \text{ または } \overline{\alpha}\beta = \alpha\overline{\beta} \text{ または } \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} = 0$$

である．

$|\alpha| = |\beta|$ のとき，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ である．

$\overline{\alpha}\beta = \alpha\overline{\beta}$ のとき，$\dfrac{\beta}{\alpha} = \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}$ より，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は実数であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるが，これは 3 点 O，A，B が三角形の頂点であることに反する．

$\overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} = 0$ のとき，$\dfrac{\beta}{\alpha} + \overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = 0$ より，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は純虚数であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

以上より，$\triangle\mathrm{OAB}$ は

$\mathbf{OA} = \mathbf{OB}$ の二等辺三角形 または $\angle\mathrm{AOB}$ が直角の直角三角形 ……(答)

である．