z, w を相異なる複素数で z の虚部は正，w の虚部は負とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1, z, -1, w が複素数平面の同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$$

が負の実数となることであることを示せ．

(2) $z=x+yi$ が $x<0$ と $y>0$ を満たすとする．1, z, -1, $\dfrac{1+z^2}{2}$ が複素数平面の同一円周上にあるとき，複素数 z の軌跡を求めよ．

(16 東北大 後 理 5)

【答】

(1) 略

(2) $(x-1)^2+y^2=4$ かつ $-1<x<0$ かつ $y>0$

【解答】

(1) 1, z, -1, w が表す点をそれぞれ A，P，B，Q とする．z の虚部は正，w の虚部は負より，P，Q は実軸に関して反対側にあるから，A(1), P(z), B(-1), Q(w) が同一円周上にあるための必要十分条件は

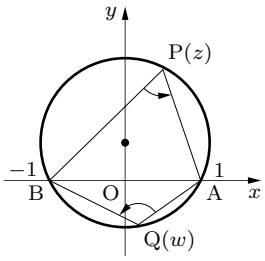
$$\angle \mathrm{AQB}+\angle \mathrm{BPA}=\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

である．角の向きに注意すると

$$① \iff \arg\frac{-1-w}{1-w}+\arg\frac{1-z}{-1-z}=\pi$$

$$\iff \arg\frac{(-1-w)(1-z)}{(1-w)(-1-z)}=\pi$$

$$\iff \frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)} \text{は負の実数である} \qquad \cdots\cdots (\text{証明終わり})$$



(2) $z=x+yi$ $(x<0,\ y>0)$ のとき

$$\frac{1+z^2}{2}=\frac{1+(x+yi)^2}{2}=\frac{1+x^2-y^2}{2}+xyi$$

であり，$\left(\dfrac{1+z^2}{2}\text{の虚部}\right)=xy<0$ である．したがって，1, z, -1, $\dfrac{1+z^2}{2}$ に対して (1) が適用できる．

$$\frac{\left(1+\dfrac{1+z^2}{2}\right)(1-z)}{\left(1-\dfrac{1+z^2}{2}\right)(1+z)}=\frac{(3+z^2)(1-z)}{(1-z^2)(1+z)}=\frac{3+z^2}{(1+z)^2}$$

より

$$1,\ z,\ -1,\ \frac{1+z^2}{2} \text{が同一円周上にある}$$

$$\iff \frac{3+z^2}{(1+z)^2}=t \text{ を満たす負の実数 } t \text{ が存在する}$$

z は虚数より，$1+z \neq 0$ であり

$$\frac{3+z^2}{(1+z)^2}=t \iff 3+z^2=t(1+z)^2 \quad \cdots\cdots ②$$

である．

$$\begin{aligned} ② &\iff 3+(x+yi)^2=t(1+x+yi)^2 \\ &\iff x^2-y^2+3+2xyi=t\{(1+x)^2-y^2+2(1+x)yi\} \\ &\iff \begin{cases} x^2-y^2+3=t\{(1+x)^2-y^2\} & \cdots\cdots ③ \\ xy=t(1+x)y & \cdots\cdots ④ \end{cases} \end{aligned}$$

$y \neq 0\ (>0)$ より

$$④ \iff x=t(1+x)$$

$x=-1$ とすると $-1=t\cdot 0$ となり，不合理である．$x \neq -1$ であるから

$$t=\frac{x}{1+x} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．$t<0$ より

$$\frac{x}{1+x}<0 \iff (1+x)x<0$$

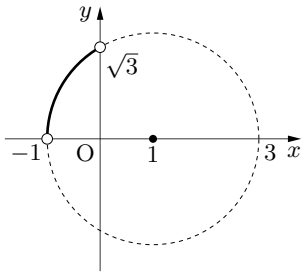
$$\therefore \quad -1<x<0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑤を③に代入すると

$$x^2-y^2+3=\frac{x}{1+x}\{(1+x)^2-y^2\}$$

変形し

$$\begin{aligned} &(1+x)(x^2-y^2+3)=x(x^2-y^2+2x+1) \\ &x^2-y^2+3+3x=2x^2+x \\ &x^2+y^2-2x=3 \\ &(x-1)^2+y^2=4 \qquad \cdots\cdots ⑦ \end{aligned}$$



$x<0$ かつ $y>0$ のもとで，⑥かつ⑦を図示すると，右図の太線部分となる．　……(答)

- $\dfrac{3+z^2}{(1+z)^2}$ が負の実数であることの別処理.

(I) $z=x+yi$ を代入すると

$$\frac{3+z^2}{(1+z)^2}=\frac{3+(x+yi)^2}{(1+x+yi)^2}=\frac{(x^2-y^2+3+2xyi)(1+x-yi)^2}{\{(1+x)^2+y^2\}^2}$$

ここで

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= (x^2-y^2+3+2xyi)\{(1+x)^2-y^2-2(1+x)yi\} \\ &= (x^2-y^2+3)\{(1+x)^2-y^2\}+4x(1+x)y^2 \\ &\quad +2y\{x(1+x)^2-xy^2-(1+x)(x^2-y^2+3)\}i \\ &= y^4+(2x^2+2x-4)y^2+(x^2+3)(1+x)^2+2y(x^2+y^2-2x-3)i \end{aligned}$$

$$\frac{3+z^2}{(1+z)^2}\text{が負の実数である} \iff \begin{cases} (\text{実部})<0 & \cdots\cdots ⓐ \\ (\text{虚部})=0 & \cdots\cdots ⓑ \end{cases}$$

$y>0$ より

$$\text{ⓑ} \iff x^2+y^2-2x-3=0 \qquad \cdots\cdots \text{ⓒ}$$
$$\therefore \quad (x-1)^2+y^2=4 \qquad \cdots\cdots \text{ⓒ}'$$

ⓒを ⓐ に代入して，y を消去すると

(実部の分子)
$$=(-x^2+2x+3)^2+(2x^2+2x-4)(-x^2+2x+3)+(x^2+3)(1+x)^2$$
$$=(x^4-4x^3-2x^2+12x+9)$$
$$\quad+(-2x^4+2x^3+14x^2-2x-12)$$
$$\quad+(x^4+2x^3+4x^2+6x+3)$$
$$=16x^2+16x$$
$$=16x(x+1)$$

したがって

$$\text{ⓐ} \iff -1<x<0 \qquad \cdots\cdots \text{ⓓ}$$

$x<0$ かつ $y>0$ にもとで，ⓒ′ かつ ⓓ を図示すると解答の図を得る．

(II) $\alpha=\dfrac{3+z^2}{(1+z)^2}$ とおくと

$$\alpha\text{が負の実数である} \iff \begin{cases}\overline{\alpha}=\alpha & \cdots\cdots \text{ⓐ}\\ \alpha+\overline{\alpha}<0 & \cdots\cdots \text{ⓘ}\end{cases}$$

$z=x+yi$ ($x<0$ かつ $y>0$) のとき，ⓐ，ⓘ を変形する．

$$\text{ⓐ} \iff \frac{3+\overline{z}^2}{(1+\overline{z})^2}=\frac{3+z^2}{(1+z)^2}$$
$$\iff (3+\overline{z}^2)(1+z)^2-(3+z^2)(1+\overline{z})^2=0 \quad (z\text{ は虚数より } 1+z\neq 0)$$

整理すると

$$3\{(1+z)^2-(1+\overline{z})^2\}+\overline{z}^2(1+z)^2-z^2(1+\overline{z})^2=0$$
$$3(2+z+\overline{z})(z-\overline{z})+(\overline{z}+z+2z\overline{z})(\overline{z}-z)=0$$

z は虚数より，$\overline{z}-z\neq 0$ であるから

$$-3(2+z+\overline{z})+(\overline{z}+z+2z\overline{z})=0$$
$$z\overline{z}-(\overline{z}+z)-3=0 \qquad \cdots\cdots \text{ⓤ}$$
$$(z-1)(\overline{z}-1)=4$$
$$\therefore \quad |z-1|=2 \qquad \cdots\cdots \text{ⓞ}$$

また

$$\text{ⓘ} \iff \frac{3+z^2}{(1+z)^2}+\frac{3+\overline{z}^2}{(1+\overline{z})^2}<0$$

$(1+z)^2(1+\overline{z})^2(=|1+z|^4>0)$ を両辺に掛けると

$$(3+z^2)(1+\overline{z})^2+(3+\overline{z}^2)(1+z)^2<0$$

$$3\{(1+\overline{z})^2+(1+z)^2\}+z^2(1+\overline{z})^2+\overline{z}^2(1+z)^2<0$$

$$3(2+2z+2\overline{z}+z^2+\overline{z}^2)+(z^2+\overline{z}^2+2z^2\overline{z}+2z\overline{z}^2+2z^2\overline{z}^2)<0$$

$$(z\overline{z})^2+z\overline{z}(z+\overline{z})+2(z^2+\overline{z}^2)+3(z+\overline{z})+3<0$$

ここで，㋒より

$$z\overline{z}=z+\overline{z}+3$$

また

$$z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=(z+\overline{z})^2-2(z+\overline{z})-6$$

であることに注意すると，上式は

$$(z+\overline{z}+3)^2+(z+\overline{z}+3)(z+\overline{z})$$
$$+2\{(z+\overline{z})^2-2(z+\overline{z})-6\}+3(z+\overline{z}+3)+3<0$$

$$4(z+\overline{z})^2+8(z+\overline{z})<0$$

$$(z+\overline{z})(z+\overline{z}+2)<0$$

$$-2<z+\overline{z}<0$$

$$-1<(z\text{ の実部})<0 \qquad \cdots\cdots ㋔$$

$x<0$ かつ $y>0$ にもとで，㋓かつ㋔を図示すると解答の図を得る．