次の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上で，$\dfrac{(1-i)(z-2)}{iz}$ が実数となるような点 z が描く図形を図示せよ．

(2) a，b は実数の定数で，$b \fallingdotseq 0$ とする．z が (1) で求めた図形上を動くとき，$w = \dfrac{iz+a(1+i)}{z-b}$ と表せる点 w が，つねに 2 点 0 と $1+i$ を通る直線上にあるような a，b を求めよ．

(16 横浜国大 後 理工 3)

【答】

(1) 略

(2) $a=-2$，$b=2$

【解答】

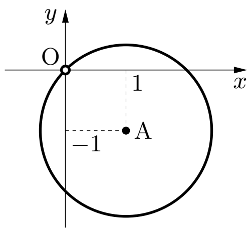
(1) $\dfrac{(1-i)(z-2)}{iz}$ が実数である条件は

$$\frac{(1-i)(z-2)}{iz} = \overline{\left\{\frac{(1-i)(z-2)}{iz}\right\}}$$

$$\iff \frac{(1-i)(z-2)}{iz} = \frac{(1+i)(\overline{z}-2)}{-i\overline{z}}$$

$$\iff \begin{cases} (1-i)(z-2)\overline{z}+(1+i)(\overline{z}-2)z=0 & \cdots\cdots ① \\ z \fallingdotseq 0 \end{cases}$$

ここで



$$① \iff 2z\overline{z}-2(1-i)\overline{z}-2(1+i)z=0$$

$$\iff z\overline{z}-(1-i)\overline{z}-(1+i)z=0 \quad \cdots\cdots ①'$$

$$\iff \{z-(1-i)\}\{\overline{z}-\overline{(1-i)}\}=1^2+1^2$$

$$\iff |z-(1-i)|^2=2$$

$$\iff |z-(1-i)|=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①''$$

である．求める図形は「①$''$ かつ $z \fallingdotseq 0$」であり，**右図の円の原点を除く部分**である．

……(答)

(2) (1) を満たす z に対し点 w がつねに 2 点 0 と $1+i$ を通る直線上にある条件は，(1) を満たす z に対しつねに $\dfrac{w}{1+i}$ が実数となることであるから

$$\frac{w}{1+i} = \overline{\left(\frac{w}{1+i}\right)} \iff (1-i)w=(1+i)\overline{w}$$

$w = \dfrac{iz+a(1+i)}{z-b}$ (a，b は実数) より

$$(1-i)\frac{iz+a(1+i)}{z-b} = (1+i)\frac{-i\overline{z}+a(1-i)}{\overline{z}-b}$$

$$\iff \begin{cases} (1-i)\{iz+a(1+i)\}(\overline{z}-b)=(1+i)\{-i\overline{z}+a(1-i)\}(z-b) & \cdots\cdots ② \\ z-b \fallingdotseq 0 \end{cases}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
② &\iff (1-i)\{iz\overline{z}+a(1+i)\overline{z}-biz-ab(1+i)\} \\
&\qquad = (1+i)\{-iz\overline{z}+bi\overline{z}+a(1-i)z-ab(1-i)\} \\
&\iff 2iz\overline{z}+\{2a+b(1-i)\}\overline{z}-\{2a+b(1+i)\}z=0 \\
&\iff z\overline{z}-\left(\frac{b}{2}+\frac{2a+b}{2}i\right)\overline{z}-\left(\frac{b}{2}-\frac{2a+b}{2}i\right)z=0 \qquad \cdots\cdots ②'
\end{aligned}
$$

よって，(1) を満たす z がつねに「②$'$ かつ $z \fallingdotseq b$」を満たす条件は，①$'$ かつ $z \fallingdotseq 0$ を満たす点 $z(\fallingdotseq b)$ がすべて図形②$'$ 上にあることであり，これは，①$'$ と②$'$ が一致することに他ならない.

よって，求める実数 a, b は

$$
\frac{b}{2}+\frac{2a+b}{2}i=1-i \iff \begin{cases} \dfrac{b}{2}=1 \\ \dfrac{2a+b}{2}=-1 \end{cases}
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{a=-2,\ b=2} \qquad \cdots\cdots(答)
$$