0 でない複素数 z に対し，$w = z + \dfrac{4}{z}$ とする．

(1) z が複素数平面上で円 $|z| = 1$ 上を動くとき，w が複素数平面上で描く図形を図示せよ．

(2) w が実数となるような z 全体が表す複素数平面上の図形を図示せよ．

(3) z が (2) で求めた図形上にあって，かつ $|z-2| \leqq 4$ であるとき，$|z-3-4i|$ の最大値を求めよ．

(16 青山学院大 理工 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 7

【解答】

(1) z は円 $|z| = 1$ 上を動くから，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおける．

$\dfrac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ であり

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{4}{z} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta + 4(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= 5\cos\theta - 3i\sin\theta \end{aligned}$$

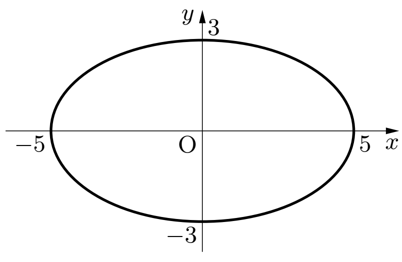
である．$w = x + yi$ (x, yは実数) とおくと

$$\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = -3\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{5} \\ \sin\theta = -\dfrac{y}{3} \end{cases}$$

これを満たす θ が存在するような x, y の条件は

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(-\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

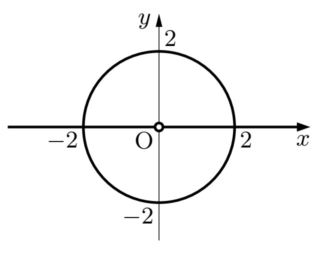
$$\therefore \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



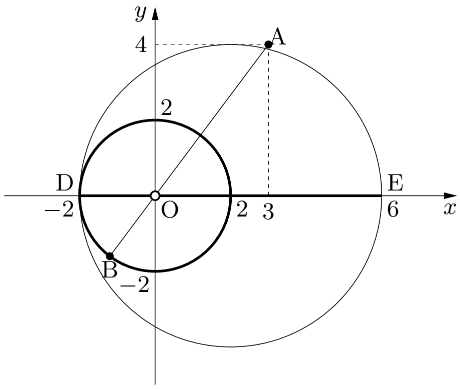
よって，w が描く図形は右図のだ円である．

(2) w が実数となるための条件は

$$\begin{aligned} & w = \overline{w} \\ \iff & z + \frac{4}{z} = \overline{z} + \frac{4}{\overline{z}} \\ \iff & (z - \overline{z}) - 4\left(\frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{z}\right) = 0 \\ \iff & \frac{(z-\overline{z})(|z|^2 - 4)}{|z|^2} = 0 \\ \iff & \begin{cases} z = \overline{z} \text{ または } |z| = 2 \\ z \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



よって，w が実数となるような z 全体が表す図形は，原点を除く実軸，および原点を中心とする半径 2 の円であり，図示すると**右図の太線部分**となる．



(3) (2) の図形かつ $|z-2| \leqq 4$ の表す図形は右図の太線部分となる．この図形上の点 z を P，点 $3+4i$ を A とすると，$|z-3-4i|$ は AP の距離を表す．

P が円 $|z|=2$ 上にあるとき，直線 OA と円 $|z|=2$ との交点のうち，O に関して A と反対側にある点を B とすると，AP が最大となるのは点 P が点 B にあるときである．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= \mathrm{OA}+\mathrm{OB} \\
&= \sqrt{3^2+4^2}+2 \\
&= 5+2 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

P が 2 点 -2, 2 を結ぶ線分上にあるとき，点 -2 を D，点 2 を E とおくと，$\mathrm{AE} < \mathrm{AD}$ より AP が最大となるのは点 P が点 D にあるときである．

D は円 $|z|=2$ 上の点でもあるから

$$\mathrm{AD} < \mathrm{AB}$$

である．

よって，AP の最大値は **7** である． ……(答)