

複素数  $z, w$  について、次の関係が成立することを示せ。ただし複素数  $\alpha$  に対し、 $\bar{\alpha}$  は  $\alpha$  と共役な複素数を表す。

(i)  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(ii)  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

【答】

(i) 略

(ii) 略

【解答】

$z = a + bi, w = c + di$  ( $a, b, c, d$  は実数,  $i$  は虚数単位) とおく。

(i) 左辺, 右辺をそれぞれ計算する。

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$$

$$\bar{z} + \bar{w} = (a-bi) + (c-di) = (a+c) - (b+d)i$$

よって,  $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$  は成立する。

…… (証明終わり)

(ii) 左辺, 右辺をそれぞれ計算する。

$$\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\bar{z}\bar{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd) + (-ad-bc)i = (ac-bd) - (ad+bc)i$$

よって,  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$  は成立する。

…… (証明終わり)