数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = a > 0,\ a_{n+1} = 16{a_n}^3 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

をみたすものとする．

(i) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ とするとき，$\{b_n\}$ の一般項を a と n を用いて表せ．
(ii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a と n を用いて表せ．
(iii) すべての n について $a_n = a$ をみたすような a の値を求めよ．

(16 札幌医大 1(2))

【答】

(1) $b_n = (2 + \log_2 a)3^{n-1} - 2$

(2) $a_n = \dfrac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$

(3) $a = \dfrac{1}{4}$

【解答】

$$a_{n+1} = 16{a_n}^3 \qquad \cdots\cdots ①$$

(i) $a_1 = a > 0$ であり，$a_k > 0$ と仮定すると $a_{k+1} > 0$ であるから，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $a_n > 0$ である．したがって，①の両辺の 2 を底とする対数をとることができる．

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2(16{a_n}^3)$$
$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 16 + 3\log_2 a_n$$
$$\therefore\quad \log_2 a_{n+1} = 3\log_2 a_n + 4$$

$b_n = \log_2 a_n$ とすると

$$b_{n+1} = 3b_n + 4$$

であり，$\beta = 3\beta + 4$ の解が $\beta = -2$ であることを用いると，この式は

$$b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$$

と変形される．数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = 2 + \log_2 a$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n + 2 = (2 + \log_2 a)3^{n-1}$$

である．よって

$$\boldsymbol{b_n = (2 + \log_2 a)3^{n-1} - 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(ii) (i) から

$$b_n = \log_2(4a)^{3^{n-1}} - \log_2 4 = \log_2 \frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$$

$b_n = \log_2 a_n$ だから

$$\boldsymbol{a_n = \frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(iii) $a_n = a$ を満たすのは

$$\frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4} = a \iff (4a)^{3^{n-1}} = 4a$$

$4a > 0$ であり

$$(4a)^{3^{n-1}-1} = 1$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つような a の値は

$$4a = 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{4}}$$ ……(答)

- (i) の誘導を無視して，①の両辺を 4 倍すると，(ii) は次のようにして解くこともできる．

$$4a_{n+1} = (4a_n)^3$$

$$\therefore \quad 4a_n = (4a)^{\overbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}^{n-1\text{ 個}}} = (4a)^{3^{n-1}}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{(4a)^{3^{n-1}}}{4}$$