

後期：理 学 部

1 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に相異なる n 個の点 A_1, \dots, A_n が並んで、各 j ($j = 1, \dots, n$) に対して

$$\overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}$$

を満たす k, l が存在するとする。このとき n は 6 の倍数であることを示せ。

2 あるウイルスの感染拡大について次の仮定で試算を行う。このウイルスの感染者は感染してから 1 日の潜伏期間において、2 日後から毎日 2 人の未感染者にこのウイルスを感染させるとする。新たな感染者 1 人が感染源となった n 日後の感染者数を a_n 人とする。たとえば、1 日後は感染者は増えず $a_1 = 1$ で、2 日後は 2 人増えて $a_2 = 3$ となる。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+2}, a_{n+1}, a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を求めよ。
- (3) 感染者数が初めて 1 万人を超えるのは何日後か求めよ。

3

サイコロを 7 個同時に 1 回振るとき、1 から 6 の目がすべて出る事象を A とし、同じ目が 6 個以上出る事象を B とする。事象 B が起こらなかった場合に事象 A の起こる確率を求めよ。

4

xy 平面において曲線 $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) と x 軸との交点を $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ とし、 y 軸との交点を $C(0, 2)$, 原点を O とする。このとき、以下の問い合わせよ。

- (1) この曲線の第 1 象限の部分に A , C と異なる点 P を四角形 $OAPC$ の面積が最大となるようにとる。このとき、 P の座標とその最大値を求めよ。
- (2) この曲線上に A , B , C と異なる 2 点 E , F を任意にとる。これら 5 点で作られる五角形の面積の最大値を求めよ。

[5]

z, w を相異なる複素数で z の虚部は正, w の虚部は負とする。このとき, 以下の問い合わせよ。

- (1) $1, z, -1, w$ が複素数平面の同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$$

が負の実数となることを示せ。

- (2) $z = x + yi$ が $x < 0$ と $y > 0$ を満たすとする。 $1, z, -1, \frac{1+z^2}{2}$ が複素数平面の同一円周上にあるとき, 複素数 z の軌跡を求めよ。

[6]

以下の問い合わせよ。

- (1) n を正の整数として, 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

- (2) 次の積分値 I を最小にする実数 a の値と, その最小値を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} (x^2 - a \cos 2x)^2 \, dx$$