定員 2 名，3 名，4 名の 3 つの部屋がある．

(i) 2 人の教員と 7 人の学生の合計 9 人をこれらの 3 つの部屋に定員どおりに入れる割り当て方は $\boxed{\text{あ}}$ とおりである．また，その割り当て方のなかで 2 人の教員が異なる部屋に入るようにする割り当て方は $\boxed{\text{い}}$ とおりである．

(ii) 7 人の学生のみを，これらの 3 つの部屋に定員を超えないように入れる割り当て方は $\boxed{\text{う}}$ とおりである．ただし誰も入らない部屋があってもよい．

(16 慶應大 医 1(1))

【答】

あ	い	う
1260	910	805

【解答】

定員 2 名，3 名，4 名の部屋を順に A，B，C とする．

(i) 9 人を 3 つの部屋に定員どおりに入れる割り当て方は，A に入れる 2 人を選び，残り 7 人から B に入れる 3 人を選べばよいから

$$ {}_9C_2 \times {}_7C_3 = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} \times \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 36 \times 35 = \mathbf{1260} \quad (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

2 人の教員が同じ部屋に入るようにする割り当て方は

(ア) 教員は A に入り，学生は B に 3 人，C に 4 人が入る
(イ) 教員は B に入り，学生は A に 2 人，B に 1 人，C に 4 人が入る
(ウ) 教員は C に入り，学生は A に 2 人，B に 3 人，C に 2 人が入る

の 3 つのタイプがあり，学生の割り当て方は

(ア) ${}_7C_3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$ (通り)

(イ) ${}_7C_2 \times {}_5C_1 = \dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1} \times 5 = 105$ (通り)

(ウ) ${}_7C_2 \times {}_5C_3 = \dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1} \times \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 210$ (通り)

よって，求める割り当て方は

$$ 1260 - (35 + 105 + 210) = \mathbf{910} \quad (\text{通り}) \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

- $\boxed{\text{あ}}$ を利用せずに直接 $\boxed{\text{い}}$ を求めることもできる．

(ア) 教員は A，B に入り，学生は A に 1 人，B に 2 人，C に 4 人が入る
(イ) 教員は A，C に入り，学生は A に 1 人，B に 3 人，C に 3 人が入る
(ウ) 教員は B，C に入り，学生は A に 2 人，B に 2 人，C に 3 人が入る

の 3 つのタイプがあり，学生の割り当て方は

(ア) $2 \times {}_7C_1 \times {}_6C_2 = 2 \times 7 \times \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 210$ (通り)

(イ) $2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_1 = 2 \times 7 \times \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} \times 5 = 280$ (通り)

(ウ) $2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 = 2 \times \dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1} \times \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 420$ (通り)

よって，求める割り当て方は

$$210 + 280 + 420 = 910 \quad (\text{通り})$$

(ii) 2 人の教員と 7 人の学生と 3 つの部屋に割り当ててから，2 人の教員を除けばよい．
2 人の教員が同じ部屋に入るように割り当ててから 2 人の教員を除くのは，(i) から

$$35 + 105 + 210 = 350 \quad (\text{通り})$$

2 人の教員が異なる部屋に入るように割り当ててから 2 人の教員を除くのは，(1) での 2 人の教員を区別をなくせばよいから

$$\frac{910}{2} = 455 \quad (\text{通り})$$

よって，求める割り当て方は

$$350 + 455 = \mathbf{805} \quad (\text{通り})$$ ……(答)