6 人の学生 a，b，c，d，e，f がいて，学生は 3 つの部屋 X，Y，Z のいずれかの部屋に必ず入る．それぞれの部屋の最大収容人数は，X が 2 人，Y が 3 人，Z が 4 人である．X，Y，Z の部屋に入る人数を $(x,\ y,\ z)$ と表す．例えば，X に 1 人，Y に 2 人，Z に 3 人が入るとき，(1, 2, 3) と表す．このとき，次の問 (1)〜(5) に答えよ．解答欄 (省略) には，答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) X を空き部屋とし，Y に 2 人，Z に 4 人入るときの，学生の入り方の場合の数を求めよ．

(2) X が空き部屋のときの，可能な $(0,\ y,\ z)$ の組をすべて求めよ．また，X が空き部屋のときの，学生の入り方の場合の数を求めよ．

(3) X に 1 人だけが入るときの，可能な $(1,\ y,\ z)$ の組をすべて求めよ．また，X に 1 人だけが入るときの，学生の入り方の場合の数を求めよ．

(4) X が満室になり，かつ空き部屋がないときの，可能な $(2,\ y,\ z)$ の組をすべて求めよ．また，X が満室になり，かつ空き部屋がないときの，学生の入り方の場合の数を求めよ．

(5) a と b が一緒の部屋にならず，かつ空き部屋があるときの，学生の入り方の場合の数を求めよ．

(16 立教大 経・法 3)

【答】

(1) 15
(2) (0, 2, 4)，(0, 3, 3)，35
(3) (1, 1, 4)，(1, 2, 3)，(1, 3, 2)，150
(4) (2, 1, 3)，(2, 2, 2)，(2, 3, 1)，210
(5) 28

【解答】

(1) $(x,\ y,\ z) = (0,\ 2,\ 4)$ となる入り方の場合の数は，6 人の中から，Y に入る 2 人を選ぶとよいから

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = \mathbf{15}\quad (通り)$$ ……(答)

(2) Y，Z の最大収容人数は，それぞれ 3 人，4 人だから，X が空き部屋のときの，可能な $(0,\ y,\ z)$ の組は

$$\mathbf{(0,\ 2,\ 4),\ (0,\ 3,\ 3)}$$ ……(答)

である．

また，X が空き部屋のときの，学生の入り方の場合の数は

(i) (0, 2, 4) のとき：(1) から 15 通り
(ii) (0, 3, 3) のとき：(1) と同様にして

$${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20\quad (通り)$$

(ｉ)，(ii) を合わせて

$$15+20=\mathbf{35}\quad(\text{通り})$$ ……(答)

(3) X に 1 人だけが入るときの，可能な $(1,\ y,\ z)$ の組は

$$\mathbf{(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2)}$$ ……(答)

の 3 通りである．

また，X に 1 人だけが入るときの，学生の入り方の場合の数は

(ｉ) (1, 1, 4) のとき ：X に入る 1 人の選び方，その各々について，Y に入る 1 人の選び方から

$$_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1=6\cdot5=30\quad(\text{通り})$$

(ii) (1, 2, 3) のとき ：同様に

$$_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2=6\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=60\quad(\text{通り})$$

(iii) (1, 3, 2) のとき ：同様に

$$_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3=60\quad(\text{通り})$$

(ｉ)〜(iii) から

$$30+60+60=\mathbf{150}\quad(\text{通り})$$ ……(答)

(4) X が満室になり，かつ空き部屋がないときの，可能な $(2,\ y,\ z)$ の組は

$$\mathbf{(2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1)}$$ ……(答)

の 3 通りである．

また，X が満室になり，かつ空き部屋がないときの，学生の入り方の場合の数は

$$\begin{aligned}&{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_3\\=&\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot4+\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}+\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot4\\=&60+90+60\\=&\mathbf{210}\quad(\text{通り})\end{aligned}$$ ……(答)

(5) a と b が一緒の部屋にならず，かつ空き部屋があるときの，可能な $(x,\ y,\ z)$ の組は，a，b が入る 2 部屋は必要であり，また，収容人数の関係から，Z を空き部屋にすることはできないから

$$(0,\ 2,\ 4),\ (0,\ 3,\ 3),\ (2,\ 0,\ 4)$$

の 3 通りである．

この各々の場合に対して，a，b の入り方を決め，次に残りの 4 人の入り方を決める．条件を満たす学生の入り方の場合の数は

$$\begin{aligned}&2\cdot{}_4\mathrm{C}_1+2\cdot{}_4\mathrm{C}_2+2\cdot{}_4\mathrm{C}_1\\=&2\cdot4+2\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}+2\cdot4\\=&8+12+8\\=&\mathbf{28}\quad(\text{通り})\end{aligned}$$ ……(答)