サイコロを 3 回投げたとき，出た目の積が 10 より小さくなる確率は $\boxed{\text{キ}}$ であり，出た目の積が 10 の倍数になる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である．ただし，サイコロはどの目が出ることも同じ程度期待できるものとする．

(16 東京歯大 1(4))

【答】

キ	ク
$\dfrac{35}{216}$	$\dfrac{1}{3}$

【解答】

サイコロを 3 回投げたときの目の出方は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい．

サイコロを 3 回投げたときの目の積が 10 より小さくなる目の出方を数える．順序を無視して，出た目を $\{a,\ b,\ c\}$ と表すと

(i) $a=b=c$ とき

条件を満たすのは $\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$ のみであり，出る目の順序を考えても

$$2 \quad \text{通り}$$

(ii) $a=b \neq c$ のとき

条件を満たすのは $\{1,\ 1,\ 2\}$，$\{1,\ 1,\ 3\}$，$\{1,\ 1,\ 4\}$，$\{1,\ 1,\ 5\}$，$\{1,\ 1,\ 6\}$，$\{2,\ 2,\ 1\}$，$\{3,\ 3,\ 1\}$ の 7 通りがある．出る目の順序も考えると

$$\frac{3!}{2!1!}\times 7 = 21 \quad \text{通り}$$

(iii) $a,\ b,\ c$ がすべて異なるとき

条件を満たすのは $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$ のみであり，出る目の順序も考えると

$$3!\times 2 = 12 \quad \text{通り}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{2+21+12}{6^3} = \boldsymbol{\frac{35}{216}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 条件を満たす目の出方を表にして数える．

 1 回目，2 回目，3 回目に出たサイコロの目をそれぞれ x_1，x_2，x_3 とし，積 x_1x_2 が 10 より小さいものを表にすると右のようになる．

 さらに，x_3 を掛けて 10 より小さいものを表にすると下のようになる．

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8		
3	3	6	9			
4	4	8				
5	5					
6	6					

$x_1x_2 \backslash x_3$	1	2	3	4	5	6	
1 (1 通り)	1	2	3	4	5	6	$1\times 6=6$ 通り
2 (2 通り)	2	4	6	8			$2\times 4=8$ 通り
3 (2 通り)	3	6	9				$2\times 3=6$ 通り
4 (3 通り)	4	8					$3\times 2=6$ 通り
5 (2 通り)	5						$2\times 1=2$ 通り
6 (4 通り)	6						$4\times 1=4$ 通り
8 (2 通り)	8						$2\times 1=2$ 通り
9 (1 通り)	9						$1\times 1=1$ 通り

これより，条件を満たす目の出方は

$$6+8+6+6+2+4+2+1=35 \text{ 通り}$$

であり，求める確率は

$$\frac{35}{6^3}=\frac{35}{216}$$

次に，出た目の積が 10 の倍数となる目の出方を数える．

(i) $\{a,\ b,\ c\}$=$\{$偶数, 5, 1 または 3$\}$ のとき
出る目の順序も考えると

$$3!\times 3\cdot 1\cdot 2=36 \quad \text{通り}$$

(ii) $\{a,\ b,\ c\}$=$\{$偶数, 偶数, 5$\}$ のとき
条件を満たすのは $\{2,\ 2,\ 5\}$，$\{2,\ 4,\ 5\}$，$\{2,\ 6,\ 5\}$，$\{4,\ 4,\ 5\}$，$\{4,\ 6,\ 5\}$，$\{6,\ 6,\ 5\}$ であり，同じ目を含むものが 3 通り，すべてが異なるものが 3 通りある．出る目の順序も考えると

$$\frac{3!}{2!1!}\times 3+3!\times 3=9+18=27 \quad \text{通り}$$

(iii) $\{a,\ b,\ c\}$=$\{$偶数, 5, 5$\}$ のとき
出る目の順序も考えると

$$\frac{3!}{2!1!}\times 3=9 \quad \text{通り}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{36+27+9}{6^3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$ ……(答)

- 余事象を考えてもよい．

  A：積が 2 の倍数となるという事象
  B：積が 5 の倍数となるという事象

  とおくと，求める確率は

$$\begin{aligned} P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})\\ &=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\ &=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}\end{aligned}$$

  である．$\overline{A}$ は 3 回とも 1 または 3 または 5 の目が出るときであり，3^3 通りあり，$\overline{B}$ は 3 回とも 5 以外の目が出るときであるから，5^3 通りある．また，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は 3 回とも 1 または 3 の目が出るときであり，2^3 通りある．よって

$$\begin{aligned} P(A\cap B)&=1-\left(\frac{3^3}{6^3}+\frac{5^3}{6^3}-\frac{2^3}{6^3}\right)\\ &=1-\frac{144}{6^3}\\ &=1-\frac{2}{3}\\ &=\frac{1}{3}\end{aligned}$$