平面上の 3 点 O，A，B が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{7}$$

を満たしている．$1 \leqq k \leqq 2$ を満たす実数 k を用いて点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ s+2t=k,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$$

と定める．こうして定まる点 P の存在範囲の面積は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(16 福岡教大 医 (推薦))

【答】

ア
$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

【解答】

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3} \iff 1^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=3$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{7} \iff 1^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=7$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6 \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②を解いて

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

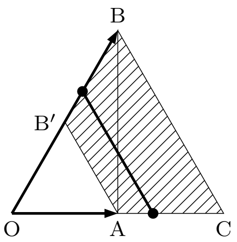
s，t は $s+2t=k$ を満たし，$k \neq 0$ であるから，$\dfrac{s}{k}+\dfrac{2t}{k}=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{2t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB'}})$$

k を固定して s, t を動かすと，s, t は $\dfrac{s}{k}+\dfrac{2t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq 0$，$\dfrac{2t}{k}\geqq 0$ を満たすから，P は $k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の終点を結ぶ線分 (右図の両端を含む太線) 上を動く．k を $1\leqq k\leqq 2$ の範囲で動かすと，この線分が動き，点 P の存在範囲は右の図の斜線部分である．ただし，点 C は，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす点とする．ここで，$\triangle\mathrm{OAB'}$，$\triangle\mathrm{OCB}$ は正三角形であるから



$$\triangle\mathrm{OAB'}=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{OCB}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

したがって，点 P の存在範囲の面積は

$$\triangle\mathrm{OCB}-\triangle\mathrm{OAB'}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$ ……(答)