点 $(1,\ 2,\ 3)$ を中心とする球が平面 $z=-2$ と接している．以下の設問に答えなさい．

(1) この球面の方程式を求めなさい．

(2) 点 $(8,\ 1,\ p)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(3,\ -4,\ 2)$ に平行な直線が，この球と接している．p の値を求めなさい．

(16 専修大 ネット情報 2)

【答】

(1) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$
(2) $p=5$

【解答】

(1) 点 $(1,\ 2,\ 3)$ を中心とする球が平面 $z=-2$ と接しているから，球の半径は点 $(1,\ 2,\ 3)$ と平面 $z=-2$ との距離と等しく 5 である．

よって，球面 S の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 点 $(8,\ 1,\ p)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(3,\ -4,\ 2)$ に平行な直線上の点 $(x,\ y,\ z)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8+3t \\ 1-4t \\ p+2t \end{pmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

と表される．これが球面と接する条件は

$$\begin{aligned}
&(7+3t)^2+(-1-4t)^2+(p-3+2t)^2=25\\
&(9t^2+42t+49)+(16t^2+8t+1)+\{4t^2+4(p-3)t+(p-3)^2\}=25\\
&29t^2+2(2p+19)t+(p-3)^2+25=0\\
&29t^2+2(2p+19)t+p^2-6p+34=0
\end{aligned}$$

がただ 1 つの実数解をもつことである．判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
\frac{D}{4}&=(2p+19)^2-29(p^2-6p+34)\\
&=(4p^2+76p+361)+(29p^2-174p+986)\\
&=-25p^2+250p-625\\
&=-25(p^2-10p+25)\\
&=-25(p-5)^2
\end{aligned}$$

$D=0$ より，求める p の値は $\boldsymbol{p=5}$ である． $\cdots\cdots$(答)