実数 $a,\ b,\ c$ が

$$a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=8,\ abc=-3$$

を満たすとき，次の値を求めなさい．

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

(17 福島大 人文社会 3(1))

【答】 5

【解答】

$a+b+c=2,\ abc=-3$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= ab(2-c)+bc(2-a)+ca(2-b)\\ &= 2(ab+bc+ca)-3abc\\ &= 2(ab+bc+ca)-3\cdot(-3)\\ &= 2(ab+bc+ca)+9\end{aligned}$$

ここで，等式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

に，$a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=8$ を代入すると

$$\begin{aligned}&2^2=8+2(ab+bc+ca)\\ \therefore\quad &ab+bc+ca=-2 \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

よって

$$(\text{与式})=2\cdot(-2)+9=\mathbf{5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ は 3 文字 $a,\ b,\ c$ の対称式なので，基本対称式 $a+b+c$, $ab+bc+ca,\ abc$ で表すことができる．すなわち

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= ab(a+b+c-c)+bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)\\ &= (ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc\end{aligned}$$

  である．これは【解答】と同じ変形なのだが，基本対称式を意識した変形であることを強調しておきたい．