a を定数とする．2 次関数 $f(x)=x^2-2ax-a+2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，かつ，それらがともに 0 以上 3 以下であるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ．

(17 公立鳥取環境大)

【答】

(1) $a<-2$ または $1<a$

(2) $1<a \leqq \dfrac{11}{7}$

【解答】

$$f(x)=x^2-2ax-a+2$$

(1) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$f(x)=0$ の判別式を D とすると $D>0$ である．

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-a+2)=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$$

より

$$(a+2)(a-1)>0 \qquad \therefore\ \ \boldsymbol{a<-2} \text{ **または** } \boldsymbol{1<a} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 方程式 $f(x)=0$ が $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $0 \leqq x \leqq 3$ の部分と異なる 2 点で交わること，すなわち

$$(*)\begin{cases} y \text{ の頂点の } y \text{ 座標} <0 \ (\iff D>0) \\ \text{軸の位置}: 0<a<3 \\ \text{端点の符号}: f(0) \geqq 0 \text{ かつ } f(3) \geqq 0 \end{cases}$$

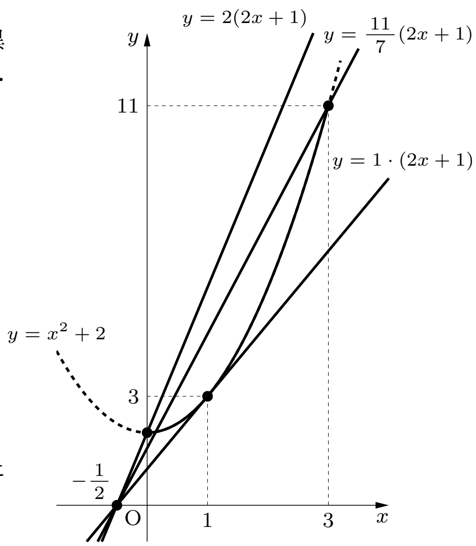
である．$f(0)=-a+2$，$f(3)=-7a+11$ より

$$(*) \iff \begin{cases} a<-2 \text{ または } 1<a \\ 0<a<3 \\ a \leqq 2 \\ a \leqq \dfrac{11}{7} \end{cases}$$

以上まとめると

$$\boldsymbol{1<a \leqq \frac{11}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $$f(x)=0 \iff x^2+2=a(2x+1)$$



$y=x^2+2$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ と $y=a(2x+1)$ が異なる 2 つの共有点をもつための a の条件を求める．
直線の傾きは $2a$ であるから
$y=x^2+2$ 上の点 $(0,\ 2)$ を通るとき

$$2a=\frac{2}{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad a=2$$

$y=x^2+2$ 上の点 $(3,\ 11)$ を通るとき

$$2a=\frac{11}{\frac{7}{2}} \quad \therefore \quad a=\frac{11}{7}$$

$y=x^2+2$ と $y=a(2x+1)$ が接するとき

$$D=0 \text{ より } a=-2,\ 1$$

接点の x 座標は $x=a$ であり，$0 \leqq x \leqq 3$ を満たすのは $a=1$ である．

右図より，求める a のとりうる値の範囲は

$$1<a \leqq \frac{11}{7}$$