実数 $p,\ q,\ r$ に対して，x の 3 次多項式 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ を考える．以下の問に答えなさい．

(1) 複素数 α に対して，$f(\alpha)=0$ であるなら，$f(\overline{\alpha})=0$ であることを示しなさい．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である．つまり，α の実部，虚部を各々 $s,\ t$ とすれば，$\alpha=s+ti,\ \overline{\alpha}=s-ti$ である．ただし，i は虚数単位である．

(2) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を 3 次方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解とする．このとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の少なくとも一つは実数であることを示しなさい．

(17 兵庫県大・経済・経営 3)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) $$f(x)=x^3+px^2+qx+r$$

共役複素数については

$$a \text{ が実数のとき, } \overline{a}=a$$

また

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},$$
$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

が成り立つことより，n を自然数とすると

$$\overline{z_1+\cdots+z_n}=\overline{z_1}+\cdots+\overline{z_n},$$
$$\overline{z^n}=\overline{z}^n$$

も成り立つ．これより，$f(\alpha)=0$ のとき

$$\begin{aligned}f(\overline{\alpha})&=(\overline{\alpha})^3+p(\overline{\alpha})^2+q\overline{\alpha}+r\\&=\overline{\alpha^3}+\overline{p}\ \overline{\alpha^2}+\overline{q}\ \overline{\alpha}+\overline{r}\\&=\overline{\alpha^3}+\overline{p\alpha^2}+\overline{q\alpha}+\overline{r}\\&=\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}\\&=\overline{f(\alpha)}\\&=\overline{0}\\&=0\end{aligned}$$

よって，$f(\overline{\alpha})=0$ である． ……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のすべてが虚数であると仮定する．

虚数 α に対して，(1) より，$\overline{\alpha}$ も $f(x)=0$ の虚数の解である．$\overline{\alpha}\fallingdotseq\alpha$ であるから，$\overline{\alpha}$はβ または γ のどちらかである．$\overline{\alpha}=\beta$ としてよい．解と係数の関係より

$$\alpha+\overline{\alpha}+\gamma=-p$$
$$\therefore\quad \gamma=-p-(\alpha+\overline{\alpha})$$

ここで，p も $\alpha+\overline{\alpha}$ も実数であるから，γ は実数である．これは $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のすべてが虚数であることに反する．

よって，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の少なくとも 1 つは実数である． ……(証明終わり)