2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は 2 つの実数解 $-k$, $-k+4$ をもち，2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ は少なくとも 1 つの正の実数解をもつ．ただし，k は自然数とする．このとき，

(i) a, b を k の式で表すと，$a=\boxed{(25)}k-\boxed{(26)}$，$b=k^2-\boxed{(27)}k$ である．

(ii) $a+b$ の値が最大のとき $b=\boxed{(28)(29)}$ であり，$a+b$ の値が最小のとき $b=\boxed{(30)(31)}$ である．

(17 慶應大 薬 1(4))

【答】

(25)	(26)	(27)	(28)(29)	(30)(31)
2	4	4	-3	-3

【解答】

(i) $x^2+ax+b=0$ の 2 解が $-k,-k+4$ であるから，解と係数の関係より

$$(-k)+(-k+4)=-a,\ (-k)(-k+4)=b$$

$$\therefore\quad a=\boxed{\mathbf{2}}k-\boxed{\mathbf{4}},\ b=k^2-\boxed{\mathbf{4}}k \qquad \cdots\cdots\ ((25)\sim(27)\text{ の答})$$

(ii) $f(x)=x^2+bx+a$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+(k^2-4k)x+2k-4\\ &=\left(x+\frac{k^2-4k}{2}\right)^2-\frac{(k^2-4k)^2}{4}+2k-4 \end{aligned}$$

k は自然数であることに注意して，軸 $x=-\dfrac{k^2-4k}{2}$ の位置で場合分けする．

(ア) $-\dfrac{k^2-4k}{2}\leqq 0$，すなわち，$k\geqq 4$ のとき

$f(0)=2k-4>0$ となるから，$f(x)=0$ は正の解をもたない．

(イ) $-\dfrac{k^2-4k}{2}>0$，すなわち，$k=1,\ 2,\ 3$ のとき

$f\left(-\dfrac{k^2-4k}{2}\right)=-\dfrac{(k^2-4k)^2}{4}+2k-4$ の値は

$k=1$ のとき $-\dfrac{17}{4}<0$

$k=2$ のとき $-4<0$

$k=3$ のとき $-\dfrac{1}{4}<0$

となるから，いずれにせよ，$f(x)=0$ は少なくとも 1 つの正の解を持つ．

よって，k の取り得る値は，$k=1,\ 2,\ 3$ である．

$$\begin{aligned} a+b&=(2k-4)+(k^2-4k)\\ &=k^2-2k-4\\ &=(k-1)^2-5 \end{aligned}$$

より，$a+b$ は $k=3$ のとき最大，$k=1$ のとき最小となる．

したがって，$b=k^2-4k$ より

$a+b$ が最大となるとき $b=3^2-4\cdot 3=\boxed{\mathbf{-3}}$, …… ((28), (29) の答)

$a+b$ が最小となるとき $b=1^2-4\cdot 1=\boxed{\mathbf{-3}}$ …… ((30), (31) の答)

である.