x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲は

$$\boxed{(\mathbf{a})}\,\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \leqq a \leqq \boxed{(\mathbf{b})}\,\boxed{\text{ウ}}$$

である．

a がこの範囲の値をとるとき，上の 2 次方程式の解 x がとり得る値の範囲は

$$\boxed{(\mathbf{c})}\,\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \leqq x \leqq \boxed{(\mathbf{d})}\,\boxed{\text{カ}}$$

である．

方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ を満たす整数の組 $(x,\ a)$ は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある．

(17 東京理大 理 (応数・応物・応化)・薬 (生創薬) 1(1))

【答】

(a)	ア	イ	(b)	ウ	(c)	エ	オ	(d)	カ	キ
$-$	5	3	$+$	1	$-$	5	3	$+$	1	3

【解答】

$$x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

実数を係数とする x の 2 次方程式①の判別式を D_x とすると

$$D_x=(a+1)^2-4(a^2+a-1)=-3a^2-2a+5=-(3a+5)(a-1)$$

①が実数解 x をもつ条件は，$D_x \geqq 0$ であり

$$\boldsymbol{-\frac{5}{3} \leqq a \leqq 1} \qquad \cdots\cdots \text{②} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

「a が②の範囲の値をとる」ということは「①を満たす実数 x が存在する」ということであるから,「a が②の範囲の値をとるときの①の解 x のとり得る値の範囲」とは,「①を満たす実数 $x,\ a$ が存在するときの x のとり得る値の範囲」のことである．①を a について整理すると

$$a^2+(x+1)a+x^2+x-1=0 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

であるから，③(これは①の a と x を入れかえたものである) を満たす実数 a が存在する条件は

$$\boldsymbol{-\frac{5}{3} \leqq x \leqq 1} \qquad \cdots\cdots \text{④} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- x のとり得る値の範囲を「③を満たす実数 a が②の範囲に存在するための実数 x の値の範囲」(解の配置の問題) ととらえてももちろんよいが，そうとはとはせずに,「③を満たす実数 a が存在するための x の値の範囲」と言い換えているところに感動してほしい．

整数の組 $(x,\ a)$ については，$x,\ a$ が実数であることが必要であり，②，④より，この範囲の整数は

$$a=-1,\ 0,\ 1\ ; \quad x=-1,\ 0,\ 1$$

である．$a=-1$ のとき，①は $x^2-1=0$ $\quad\therefore\quad x=-1,\ 1$

$a=0$ のとき，①は $x^2+x-1=0$ $\quad\therefore\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 不適．

$a=1$ のとき，①は $x^2+2x+1=0$ $\quad\therefore\quad x=-1$ (重解)

よって，① を満たす整数の組 $(x,\ a)$ は

$$(x,\ a)=(-1,\ -1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

であり，求める個数は **3** である． ……(答)

- ①を ax 平面に図示 (数学 III) すると下図となる．これにより実数 $a,\ x$ のとり得る値の範囲は一目瞭然である．