不等式 $\sqrt{x+1} \geqq 2x-1$ を満たす $x$ の値の範囲は，

$$-\boxed{\text{カ}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

(17 東洋大 理工・生命・食環境 1-2)

---

【答】

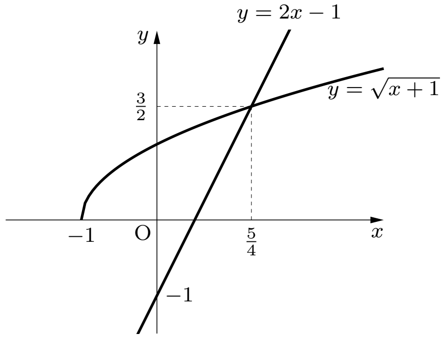
| カ | キ | ク |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 |

---

【解答】

$$\sqrt{x+1} \geqq 2x-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$y=\sqrt{x+1}$，$y=2x-1$ のグラフを描く．交点の $x$ 座標は




$$\sqrt{x+1} = 2x-1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+1=(2x-1)^2 \\ 2x-1 \geqq 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

②を解くと

$$4x^2-5x=0$$

$$\therefore \quad x=0 \text{ または } \frac{5}{4}$$

$x \geqq \dfrac{1}{2}$ より $x=\dfrac{5}{4}$ であり，グラフは右図となる．

よって，①を満たす $x$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \frac{5}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 実数条件より，$x+1 \geqq 0$ であることに注意する．

(i) $\begin{cases} x+1 \geqq 0 \\ 2x-1 \leqq 0 \end{cases} \quad \left(-1 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$\sqrt{x+1} \geqq 0 \geqq 2x-1$ であるから， ① はつねに成り立つ．

(ii) $\begin{cases} x+1 \geqq 0 \\ 2x-1 \geqq 0 \end{cases} \quad \left(x \geqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$① \iff x+1 \geqq (2x-1)^2$$

$$\therefore \quad x(4x-5) \leqq 0$$

$$\therefore \quad 0 \leqq x \leqq \frac{5}{4}$$

これと $x \geqq \dfrac{1}{2}$ とあわせると

$$\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{4}$$

( i ) または (ii) より，求める範囲は

$$-1 \leqq x \leqq \frac{5}{4}$$

である．

- 無理不等式①の同値変形

$$\text{①} \iff \begin{cases} 2x-1<0 \\ x+1 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} 2x-1 \geqq 0 \\ x+1 \geqq (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\iff -1 \leqq x < \frac{1}{2} \ \text{または} \ \begin{cases} x \geqq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-5x \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff -1 \leqq x < \frac{1}{2} \ \text{または} \ \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{4}$$

よって，　$-1 \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}$