次の問いに答えよ．ただし，a は 0 でない実数とする．

(1) 方程式 $a(x^2+2)=2x-1$ が異なる 2 つの実数解をもつための a の値の範囲を求めよ．

(2) 不等式 $a(x^2+2)>2x-1$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ．

(17 龍谷大 文系)

【答】

(1) $-1<a<0$ または $0<a<\dfrac{1}{2}$

(2) $a>\dfrac{1}{2}$

【解答】

(1) $a(x^2+2)=2x-1$ より

$$ax^2-2x+2a+1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$a \fallingdotseq 0$ より，方程式①が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，①の判別式を D とすると

$$D>0$$

である．

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-a(2a+1)=-2a^2-a+1=-(a+1)(2a-1)$$

$a \fallingdotseq 0$ に注意すると，求める条件は

$$\boldsymbol{-1<a<0} \textbf{ または } \boldsymbol{0<a<\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $a(x^2+2)>2x-1$ より

$$ax^2-2x+2a+1>0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$a \fallingdotseq 0$ より，つねに不等式②が成り立つための条件は

$$\begin{cases} a>0 \\ D<0 \end{cases} \iff \begin{cases} a>0 \\ (a+1)(2a-1)>0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a>\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$