x, y が実数で，$x^2+2y^2=1$ のとき，$2x+3y^2$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(17 中部大)

【答】

ア	イ
$\dfrac{13}{6}$	-2

【解答】

$$x^2+2y^2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$k=2x+3y^2$ ⋯⋯ ② とおき,「①かつ②」を満たす実数 x, y が存在するような k の最大値，最小値を求める．

$$「①かつ②」\iff \begin{cases} y^2=\dfrac{1-x^2}{2} & \cdots\cdots ①' \\ k=2x+3\cdot\dfrac{1-x^2}{2} & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①′ を満たす実数 y が存在する条件は

$$1-x^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -1 \leqq x \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

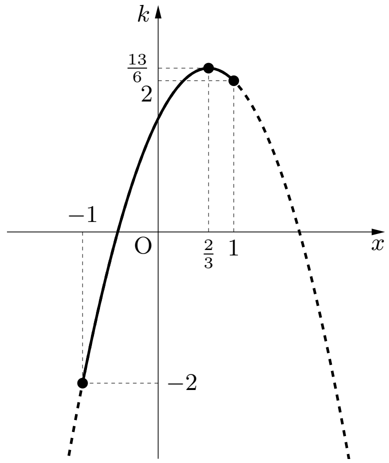
である．③は

$$\begin{aligned} k &= -\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{13}{6} \end{aligned}$$

であり，x は④の範囲で動くから，k は $x=\dfrac{2}{3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{13}{6}}$ をとる． ⋯⋯(答)

また，定義域の中点が $\dfrac{(-1)+1}{2}=0<\dfrac{2}{3}$ であることに注意すると，k は $x=-1$ のとき最小値は $\boldsymbol{-2}$ をとる． ⋯⋯(答)

- xk 平面上でグラフを描いて最大値，最小値であることを示してもよい．



- ①上の点 $(x,\ y)$ は $x = \cos\theta,\ y = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$ とパラメータ表示できる．このとき

$$\begin{aligned} 2x + 3y^2 &= 2\cos\theta + 3\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2\cos\theta + \frac{3}{2}(1 - \cos^2\theta) \\ &= -\frac{3}{2}\cos^2\theta + 2\cos\theta + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\cos\theta - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，$2x + 3y^2$ は

$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{13}{6}$ をとり，
$\cos\theta = -1$ のとき，最小値 -2 をとる．