$x>0$ のとき，$\dfrac{x+2}{x^2+4x+9}$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ である． (17 北海道薬大)

【答】

ア
$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

【解答】

$$\frac{x+2}{x^2+4x+9}=\frac{x+2}{(x+2)^2+5}$$

$t=x+2$ とおくと，$x>0$ より $t>2$ であり

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2+4x+9}&=\frac{t}{t^2+5}=\frac{1}{t+\dfrac{5}{t}} \quad (t\neq 0)\\ &\leqq \frac{1}{2\sqrt{t\cdot\dfrac{5}{t}}} \quad (\because \text{ 相加平均・相乗平均の関係})\\ &=\frac{\sqrt{5}}{10}\end{aligned}$$

である．等号は

$$\begin{cases} t=\dfrac{5}{t} \\ t>2 \end{cases} \qquad \therefore \quad t=\sqrt{5}$$

のとき成り立つ．

よって，求める最大値は $\boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{10}}$ である． …… (アの答)

- $\dfrac{x+2}{x^2+4x+9}=k$ …… ① とおき，k のとり得る値の範囲を求めてみよう．相加平均・相乗平均の関係を用いて最大値を求めることはできるが，とり得る値の範囲を求めることはできない．
  k のとり得る値の範囲は，「①かつ $x>0$」を満たす x が存在するような k の値の範囲である．
  $x^2+4x+9=(x+2)^2+1>0$ より
  $$① \iff x+2=k(x^2+4x+9)$$
  $$\therefore \quad kx^2+(4k-1)x+9k-2=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$
  $f(x)=kx^2+(4k-1)x+9k-2$ とおく．$x>0$ より，(①の左辺) >0 であるから $k>0$ であり，$y=f(x)$ のグラフは下に凸である．
  $f(0)=9k-2$ の符号で場合分けして k の範囲を求める．
  (i) $9k-2<0$ $\left(0<k<\dfrac{2}{9}\right)$ のとき
  $f(x)=0$ となる正の値 x は存在するから，$0<k<\dfrac{2}{9}$ は条件を満たす．
  (ii) $9k-2\geqq 0$ $\left(\dfrac{2}{9}\leqq k\right)$ のとき
  求める条件は
  $$\begin{cases} \text{判別式}:(4k-1)^2-4k(9k-2)\geqq 0 & \cdots\cdots ② \\ \text{軸の位置}:-\dfrac{4k-1}{k}>0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

である．②を整理すると

$$-20k^2+1 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -\frac{1}{2\sqrt{5}} \leqq k \leqq \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

③を整理すると

$$k(4k-1)<0 \qquad \therefore \quad 0<k<\frac{1}{4}$$

(ii) のもとで，まとめると　$\dfrac{2}{9} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

(i)，(ii) より，k のとり得る値の範囲は

$$0<k \leqq \frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

- $t=x+2$ とおくと

$$「① \text{ かつ } x>0」\iff \frac{t}{t^2+5}=k \text{ かつ } t>2$$
$$\iff kt^2-t+5k=0 \text{ かつ } t>2$$

$g(t)=kt^2-t+5k$ とおき

「$g(t)=0$ かつ $t>2$」を満たす t が存在する　　$\cdots\cdots (*)$

ような k の値の範囲を求める．$k>0$ であり，$y=g(t)$ のグラフは下に凸である．軸 $x=\dfrac{1}{2k}$ が $x>2$ の範囲にあるか否かで場合分けする．

(i) $\dfrac{1}{2k} \leqq 2 \left(k \geqq \dfrac{1}{4}\right)$ のとき

$$(*) \iff g(2)<0$$

$g(2)=9k-2$ より　　$k<\dfrac{2}{9}$

これは $k \geqq \dfrac{1}{4}$ に反する．

(ii) $\dfrac{1}{2k}>2 \left(0<k<\dfrac{1}{4}\right)$ のとき $\left(\lim\limits_{t\to\infty} k=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t+\dfrac{5}{t}}=0\right)$

$$(*) \iff (\text{判別式}) \geqq 0$$

$(\text{判別式})=(-1)^2-4\cdot k\cdot 5k=1-20k^2$ より　　$-\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

(ii) のもとでまとめると　$0<k \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

(i)，(ii) より，k のとり得る値の範囲は

$$0<k \leqq \frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

- 本問は最大値を求めるだけなので次のように解くこともできる．
  x が実数である条件②より

$$-\frac{1}{2\sqrt{5}} \leqq k \leqq \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

であることが必要であり，$k=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ になる x の値は

$$x=-\frac{4k-1}{2k}=-\frac{4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5}}-1}{2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-2$$

これは $x>0$ を満たす.

よって，求める最大値は $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ である.

- $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+9}$ $(x>0)$ のグラフ (数学 III) は次のようになる.