実数 α, β は $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=3$ を満たしている．$s=\alpha+\beta$，$t=\alpha\beta$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) t を s を用いて表せ．

(2) s のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $\alpha+\alpha\beta+\beta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(17 成城大 文芸)

【答】

(1) $t=s^2-3$

(2) $-2 \leqq s \leqq 2$

(3) $-\dfrac{13}{4} \leqq \alpha+a\beta+\beta \leqq 3$

【解答】

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=3 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) $s=\alpha+\beta$，$t=\alpha\beta$ …… ② とすると，①は次のように変形される．

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=3$$

$$s^2-t=3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{t=s^2-3} \qquad \cdots\cdots ③$$

……(答)

(2) ②より，α, β は，2 次方程式

$$x^2-sx+t=0$$

の 2 解である．α, β は実数より，(判別式) $\geqq 0$ であり

$$s^2-4t \geqq 0$$

である．③を代入すると

$$s^2-4(s^2-3) \geqq 0 \qquad \therefore \quad s^2 \leqq 4$$

s のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-2 \leqq s \leqq 2}$ ……(答)

(3) ②，③より

$$\alpha+\alpha\beta+\beta=s+t=s+s^2-3=\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

であるから，これを $f(s)$ とおくと，(2) の結果と $\dfrac{(-2)+2}{2}=0>-\dfrac{1}{2}$ より，求める範囲は

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \leqq f(s) \leqq f(2)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\frac{13}{4} \leqq \alpha+a\beta+\beta \leqq 3}$$

……(答)