実数 $x,\ y$ が $|x|+|y|=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $t=|x|$ とおき，$x^2+y^2$ を $t$ の式で表せ．
(2) $x^2+y^2$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

(17 東北学院大 文系 2)

---

【答】
(1) $2t^2-2t+1$
(2) $(x,\ y)=(0,\ \pm 1),\ (\pm 1,\ 0)$ のとき，最大値 1；
$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$ (複号任意) のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}$

---

【解答】
(1) $t=|x|$ とおくと，$|x|+|y|=1$ より

$$|y|=1-|x|=1-t$$

であるから

$$x^2+y^2=|x|^2+|y|^2=t^2+(1-t)^2=\boldsymbol{2t^2-2t+1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1) より

$$x^2+y^2=2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

である．$|x|\geqq 0$ かつ $|y|\geqq 0$ より，$t$ のとり得る値の範囲は

$$t\geqq 0 \text{ かつ } 1-t\geqq 0 \qquad \therefore\quad 0\leqq t\leqq 1$$

である．$t$ が動く範囲の中点が $\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であることに注意すると，$x^2+y^2$ は
$t=0,\ 1$ のとき **最大値 1** をとる． ……(答)
このとき

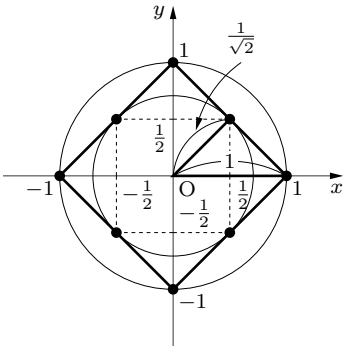
$$(|x|,\ |y|)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ \pm 1),\ (\pm 1,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき **最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる． ……(答)
このとき

$$(|x|,\ |y|)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{(x,\ y)=\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)}\ \textbf{(複号任意)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- (1) がなければ，(2) を次のように解くこともできる．

$$|x|+|y|=1 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2+y^2=r^2 \ (r \geqq 0) \qquad \cdots\cdots ②$$




実数 $x$，$y$ が①を満たすときの $r$ のとり得る値の範囲は，「①かつ②」を満たす $x$，$y$ が存在するような $r$ の値の範囲であるから，図形①上の点 $(x,\ y)$ と原点との距離 $r$ を調べればよい．

①は $x$ 軸，$y$ 軸に関して対称であり，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ のとき $x+y=1$ であるから，①は右図の正方形である．

よって，$r^2$ は

$(x,\ y)=(\pm 1,\ 0)$，$(0,\ \pm 1)$ のとき，最大値 1 をとり，

$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}$ をとる．