1 以上 3 以下の範囲を動く実数 $x,\ y,\ z$ に対して，$w=\dfrac{y+z+xy}{xy+xz}$ とする．

(1) $y=2,\ z=3$ のとき，w のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x=1$ のとき，w のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) w のとり得る値の範囲を求めよ．

(17 法政大 経営・人間環境・文 1)

【答】

(1) $\dfrac{11}{15}\leqq w\leqq\dfrac{7}{5}$

(2) $\dfrac{5}{4}\leqq w\leqq\dfrac{7}{4}$

(3) $\dfrac{7}{12}\leqq w\leqq\dfrac{7}{4}$

【解答】

$$w=\frac{y+z+xy}{xy+xz}$$

(1) $y=2,\ z=3$ のとき

$$w=\frac{2+3+2x}{2x+3x}=\frac{5+2x}{5x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{5}$$

$1\leqq x\leqq 3$ より $\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq 1$ であるから，w のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\leqq w\leqq 1+\frac{2}{5}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{11}{15}\leqq w\leqq\frac{7}{5}}$$ ……(答)

- $w=\dfrac{5+2x}{5x}$ をみたす x $(1\leqq x\leqq 3)$ が存在するような w の値の範囲を求める．

  $x\neq 0$ より

$$w=\frac{5+2x}{5x}\iff 5wx=5+2x\iff(5w-2)x-5=0$$

  $f(x)=(5w-2)x-5$ とおくと，求める条件は

$$f(1)f(3)\leqq 0$$

$$(5w-7)(15w-11)\leqq 0$$

$$\therefore\quad \frac{11}{15}\leqq w\leqq\frac{7}{5}$$

(2) $x=1$ のとき

$$w=\frac{y+z+y}{y+z}=1+\frac{y}{y+z}=1+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}$$

$1\leqq y\leqq 3,\ 1\leqq z\leqq 3$ より $\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{z}{y}\leqq 3$ であるから，w のとり得る値の範囲は

$$1+\frac{1}{1+3}\leqq w\leqq 1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{5}{4}\leqq w\leqq\frac{7}{4}}$$ ……(答)

- $w = 1 + \dfrac{y}{y+z}$

  正の数 y を固定すると，$1 \leqq z \leqq 3$ の範囲で w は単調減少であり

$$1 + \frac{y}{y+3} \leqq w \leqq 1 + \frac{y}{y+1}$$
$$\therefore \quad 2 - \frac{3}{y+3} \leqq w \leqq 2 - \frac{1}{y+1}$$

  $1 \leqq y \leqq 3$ の範囲で $2 - \dfrac{3}{y+3}$，$2 - \dfrac{1}{y+1}$ はともに単調増加であるから

$$2 - \frac{3}{1+3} \leqq w \leqq 2 - \frac{1}{3+1}$$
$$\therefore \quad \frac{5}{4} \leqq w \leqq \frac{7}{4}$$

(3) x を固定すると

$$w = \frac{y+z+xy}{xy+xz} = \frac{(y+z)+xy}{(y+z)x} = \frac{1}{x} + \frac{y}{y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\dfrac{z}{y}}$$

$1 \leqq y \leqq 3$, $1 \leqq z \leqq 3$ より，w のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1+3} \leqq w \leqq \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{3}}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \leqq w \leqq \frac{1}{x} + \frac{3}{4}$$

$1 \leqq x \leqq 3$ より $\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq 1$ であるから

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leqq w \leqq 1 + \frac{3}{4}$$

である．よって，w のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{7}{12} \leqq w \leqq \frac{7}{4}}$$ ……(答)