関数 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を求めよ．その定義域も書け．

(17 昭和大 医 1(3))

【答】 $f^{-1}(x)=\log_3(x+\sqrt{x^2-1})$，定義域は $x \geqq 1$

【解答】

$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ を x について解く．

$$2y=3^x+3^{-x}$$
$$(3^x)^2-2y\cdot 3^x+1=0$$

$t=3^x$ とおくと

$$t^2-2yt+1=0$$
$$\therefore\quad t=y\pm\sqrt{y^2-1}$$

$x \geqq 0$ より $t=3^x \geqq 1$ である．解と係数の関係より，2 解の積は 1 であり

$$y-\sqrt{y^2-1} \leqq 1 \leqq y+\sqrt{y^2-1}$$

したがって

$$3^x=y+\sqrt{y^2-1}$$
$$\therefore\quad x=\log_3(y+\sqrt{y^2-1})$$

よって，逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$\boldsymbol{f^{-1}(x)=\log_3(x+\sqrt{x^2-1})} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$f^{-1}(x)$ の定義域は，$f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ の値域に等しい．$f(x)$ の値域を調べる．

$$f'(x)=\frac{\log 3}{2}(3^x-3^{-x})$$

$\log 3>0$，また，$x>0$ のとき，$3^{-x}<1<3^x$ より，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x \geqq 0$ において単調増加である．さらに

$$f(0)=1,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

であるから，$f(x)$ の値域は 1 以上の実数全体である．

よって，$f^{-1}(x)$ の定義域は

$$\boldsymbol{x \geqq 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．