次の問に答えよ．

(1) $a,\ b$ を自然数とするとき，

$$r^{ab}-1=(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)$$

を示せ．

(2) n を自然数とする．命題

「2^n-1 が素数ならば，n は素数である」

の対偶を証明せよ．

(3) (2) の命題の逆が成り立たないような自然数 n のうち，最小のものを求めよ．

(17 佐賀大 後 理工 3)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) 11

【解答】

(1) 右辺を展開すると

$$\begin{aligned}&(r^a-1)(r^{a(b-1)}+r^{a(b-2)}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)\\=&r^{ab}+r^{ab-a}+\cdots+r^{3a}+r^{2a}+r^a\\&-(r^{ab-a}+r^{ab-2a}+\cdots+r^{2a}+r^a+1)\\=&r^{ab}-1\end{aligned}$$

よって，与えられた等式は成立する． ……(証明終わり)

(2) 命題

「2^n-1 が素数ならば，n は素数である」

の対偶

「n が素数でないならば，2^n-1 は素数でない」 …… $(*)$

を示す．

n が素数でないならば，1 でない自然数 $a,\ b$ を用いて $n=ab$ と表すことができるから

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{ab}-1\\&=(2^a-1)(2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^{2a}+2^a+1)\quad(\because\ (1))\end{aligned}$$

である．ここで，$a\geqq 2$ であるから

$$2^a-1>1,$$
$$2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\cdots+2^{2a}+2^a+1>1$$

であり，2^n-1 は合成数である．

よって，$(*)$ は成り立つ． ……(証明終わり)

(3) (2) の逆は

「n が素数ならば，2^n-1 は素数である」　　…… $(**)$

であり，$(**)$ が成り立たないような自然数 n の最小値を求める．小さい素数から順に調べていく．

$n=2$ のとき，$2^2-1=3$ であり，2^2-1 は素数である．$(**)$ は成り立つ．

$n=3$ のとき，$2^3-1=7$ であり，2^3-1 は素数である．$(**)$ は成り立つ．

$n=5$ のとき，$2^5-1=31$ であり，2^5-1 は素数である．$(**)$ は成り立つ．

$n=7$ のとき，$2^7-1=127$ であり，2^7-1 は素数である．$(**)$ は成り立つ．

$n=11$ のとき，$2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ であり，$2^{11}-1$ は合成数なので $(**)$ は成り立たない．

以上により，求める最小値は **11** である．　……(答)