「$x^3 \geqq x$」は「$x^2 \geqq 1$」であるための $\boxed{\text{(xii)}}$.

(a) 必要十分条件である　　(b) 十分条件だが必要条件ではない

(c) 必要条件だが十分条件ではない　　(d) 必要条件でも十分条件でもない

(17 北見工大 1(10))

【答】

(xii)
(d)

【解答】

2 つの条件をそれぞれ同値変形すると

$$x^3 \geqq x \iff (x-1)x(x+1) \geqq 0 \iff -1 \leqq x \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq x$$
$$x^2 \geqq 1 \iff x \leqq -1 \text{ または } 1 \leqq x$$

であるから，2 つの命題

$$x^3 \geqq x \Longrightarrow x^2 \geqq 1 \qquad (\text{反例} : x = 0),$$
$$x^3 \geqq x \Longleftarrow x^2 \geqq 1 \qquad (\text{反例} : x = -2)$$

はいずれも偽である．

よって,「$x^3 \geqq x$」は「$x^2 \geqq 1$ 」であるための必要条件でも十分条件でもない．

(d) ……(答)

- 反例をあげなくても，それぞれの不等式の解の包含関係から，2 つの命題がともに「偽」であることが分かる．