

$\frac{\log 5}{\log 7}$  は無理数であることを示せ.

(17 宮城教大 中等 (数) 1(1))

【答】 略

【解答】

背理法で示す.

対数の底を  $a$  とすると

$$0 < a < 1 \text{ のとき, } \log 5 < 0 \text{ かつ } \log 7 < 0$$

$$a > 1 \text{ のとき, } \log 5 > 0 \text{ かつ } \log 7 > 0$$

いずれのときも  $\frac{\log 5}{\log 7} > 0$  である.

$\frac{\log 5}{\log 7}$  が有理数であるとする,  $\frac{\log 5}{\log 7} = \frac{q}{p}$  ( $p, q$  は自然数) とおける. このとき

$$p \log 5 = q \log 7$$

$$\log 5^p = \log 7^q$$

であるから

$$5^p = 7^q$$

となる. 左辺は 5 で割り切れるが, 5 と 7 が互いに素であるから, 右辺は 5 では割り切れない. これは不合理である.

以上より,  $\frac{\log 5}{\log 7}$  は無理数である. …… (証明終わり)

- $\frac{\log 5}{\log 7} = \log_7 5$  と変形すれば,  $\log_7 5 > 0$  であり, 背理法の仮定は

$$\log_7 5 = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は自然数})$$

とおけて

$$5 = 7^{\frac{q}{p}} \quad \therefore 5^p = 7^q$$

以後は解答と同じである.