(1) 百の位の数が 3, 十の位の数が 7, 一の位の数が a である 3桁(けた)の自然数を $37a$ と表記する.

$37a$ が 4 で割り切れるのは

$$a = \boxed{\text{ア}},\quad \boxed{\text{イ}}$$

のときである. ただし, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ の解答の順序は問わない.

(2) 千の位の数が 7, 百の位の数が b, 十の位の数が 5, 一の位の数が c である 4 桁の自然数を $7b5c$ と表記する.

$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れる b, c の組は, 全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある. これらのうち, $7b5c$ の値が最小になるのは $b = \boxed{\text{エ}}$, $c = \boxed{\text{オ}}$ のときで, $7b5c$ の値が最大になるのは $b = \boxed{\text{カ}}$, $c = \boxed{\text{キ}}$ のときである.

また, $7b5c = (6 \times n)^2$ となる b, c と自然数 n は

$$b = \boxed{\text{ク}},\quad c = \boxed{\text{ケ}},\quad n = \boxed{\text{コサ}}$$

である.

(3) 1188 の正の約数は全部で $\boxed{\text{シス}}$ 個ある.

これらのうち, 2 の倍数は $\boxed{\text{セソ}}$ 個, 4 の倍数は $\boxed{\text{タ}}$ 個ある.

1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表すと, 末尾には 0 が連続して $\boxed{\text{チツ}}$ 個並ぶ.

(17 年 センター本試験 I・A 第 4 問)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コサ	シス	セソ	タ	チツ
2	6	3	0	6	9	6	0	6	14	24	16	8	24

【チェック・チェック】

自然数 N について

N が 4 の倍数である $\iff$ N の下 2 桁が 4 の倍数である
N が 9 の倍数である $\iff$ N の各位の数字の和が 9 の倍数である

ですが, 剰余に関する議論では合同式が威力を発揮します. 合同式の扱いにも慣れておきましょう.

最後は 2 進法表記の問題ですが, 問われているのは, 1188 のすべての約数の積に素因数 2 が何個あるかということです. $\boxed{\text{セソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ がヒントになっています.

【解答】

(1) $10 \equiv 2 \pmod 4$, $10^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4$ より

$$\begin{aligned} 37a_{(10)} &= 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + a \\ &\equiv 3 \cdot 0 + 7 \cdot 2 + a \pmod 4 \\ &\equiv 2 + a \pmod 4 \end{aligned}$$

← $N_{(10)}$ は 10 進法表記という意味です.

である．したがって

$$\begin{aligned} &37a_{(10)} \text{ が 4 で割り切れる} \\ \iff\ & 2+a \equiv 0 \pmod 4 \\ \iff\ & a \equiv -2 \pmod 4 \\ \iff\ & a \equiv 2 \pmod 4 \end{aligned}$$

$0 \leqq a \leqq 9$ より

$$a = \boxed{\mathbf{2}},\quad \boxed{\mathbf{6}} \qquad \cdots\cdots \text{(ア，イの答)}$$

である．

← $10^2 \equiv 0 \pmod 4$ により「N が 4 の倍数のである $\iff$ N の下 2 桁が 4 の倍数である」が分かる．$7a$ の 4 の倍数は $72, 76$ である．合同式については チェクリピ 189

(2) $10 \equiv 2 \pmod 4$，$10^2 \equiv 10^3 \equiv 0 \pmod 4$ より

$$\begin{aligned} 7b5c_{(10)} &\equiv 7 \cdot 0 + b \cdot 0 + 5 \cdot 2 + c \pmod 4 \\ &\equiv 2 + c \pmod 4 \end{aligned}$$

$10 \equiv 1 \pmod 9$ より，$10^2 \equiv 10^3 \equiv 1 \pmod 9$ であり

$$\begin{aligned} 7b5c_{(10)} &\equiv 7 \cdot 1 + b \cdot 1 + 5 \cdot 1 + c \pmod 9 \\ &\equiv 12 + b + c \pmod 9 \\ &\equiv 3 + b + c \pmod 9 \end{aligned}$$

← $10^n \equiv 1 \pmod 9$ より「N が 9 の倍数である $\iff$ N の各位の数字の和が 9 の倍数である」が分かる．

であるから

$$\begin{aligned} &7b5c_{(10)} \text{ が 4 でも 9 でも割り切れる} \\ \iff\ & \begin{cases} 2 + c \equiv 0 \pmod 4 \\ 3 + b + c \equiv 0 \pmod 9 \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} c \equiv 2 \pmod 4 \\ b + c \equiv 6 \pmod 9 \end{cases} \end{aligned}$$

← b，c の条件が絞られた．

$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$ より，$c = 2$，6 であり，b，c の組は

$$(b,\ c) = (4,\ 2),\ (0,\ 6),\ (9,\ 6) \qquad \cdots\cdots ①$$

の $\boxed{\mathbf{3}}$ 個である．　……（ウの答）

これらのうち，b の大小に注意すると，$7b5c_{(10)}$ の値が最小になるのは

$$b = \boxed{\mathbf{0}},\quad c = \boxed{\mathbf{6}} \qquad \cdots\cdots \text{(エ，オの答)}$$

のときで，$7b5c_{(10)}$ の値が最大になるのは

$$b = \boxed{\mathbf{9}},\quad c = \boxed{\mathbf{6}} \qquad \cdots\cdots \text{(カ，キの答)}$$

のときである．

また，$7b5c_{(10)} = (6 \times n)^2 = 4 \cdot 9 \cdot n^2$ となる b，c は①であることが必要である．①の 3 つについて

$$\begin{aligned} 7452_{(10)} &= 4 \cdot 9 \cdot 207 = 4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 23 \\ 7056_{(10)} &= 4 \cdot 9 \cdot 196 = 4 \cdot 9 \cdot 14^2 \\ 7956_{(10)} &= 4 \cdot 9 \cdot 221 = 4 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \end{aligned}$$

より，条件を満たすのは

$$b = \boxed{\mathbf{0}},\quad c = \boxed{\mathbf{6}},\quad n = \boxed{\mathbf{14}} \cdots\cdots \text{(ク〜コサの答)}$$

である．

(3) $1188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$ の正の約数は全部で

$$(2+1)(3+1)(1+1) = \boxed{\mathbf{24}}\text{個} \qquad \cdots\cdots \text{(シスの答)}$$

ある．

← 約数の個数についてはチェクリピ 182

これらのうち，2 の倍数は

$$(1+1)(3+1)(1+1) = \boxed{\mathbf{16}}\text{個}, \qquad \cdots\cdots \text{(セソの答)}$$

4 の倍数は

$$(3+1)(1+1) = \boxed{\mathbf{8}}\text{個} \qquad \cdots\cdots \text{(タの答)}$$

ある．

1188 のすべての正の約数の積に含まれる素因数 2 の個数は

$$16 + 8 = 24\text{ 個}$$

であるから，1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表すと，末尾には 0 が連続して

← 末尾に並ぶ 0 の個数についてはチェクリピ 184

$$\boxed{\mathbf{24}}\text{個} \qquad \cdots\cdots \text{(チツの答)}$$

並ぶ．