

$$\frac{n^2}{m} + \frac{m}{n} = 8 \text{ を満たす自然数 } (m, n) \text{ をすべて求めよ.}$$

(17年 東京女医大 3)

$$(m, n) = (7, 7), (49, 7), (24, 12), (72, 12), (45, 15), (75, 15), (64, 16)$$

【チェック・チェック】

分母を払うと、与えられた等式は m については2次方程式、 n については3次方程式である。次数の低い m についての方程式とみましよう。

「() () = 整数」の形に変形できないときは、解の公式を利用ましよう。この切り替えが決め手でましよう。

【解答】

$$\frac{n^2}{m} + \frac{m}{n} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$m \neq 0, n \neq 0$ より

$$\textcircled{1} \iff m^2 - 8nm + n^3 = 0$$

解の公式より

$$m = 4n \pm \sqrt{16n^2 - n^3}$$

$n > 0$ より

$$m = 4n \pm n\sqrt{16 - n}$$

m は自然数であるから、 $16 - n$ は平方数であり、 $0 \leq 16 - n < 16$ である。

$16 - n$	0	1	4	9
n	16	15	12	7

- (i) $n = 7$ のとき $m = 4 \cdot 7 \pm 7 \cdot 3 = 28 \pm 21 = 7, 49$
 (ii) $n = 12$ のとき $m = 4 \cdot 12 \pm 12 \cdot 2 = 48 \pm 24 = 24, 72$
 (iii) $n = 15$ のとき $m = 4 \cdot 15 \pm 15 \cdot 1 = 60 \pm 12 = 45, 75$
 (iv) $n = 16$ のとき $m = 4 \cdot 16 \pm 16 \cdot 0 = 48 \pm 24 = 64$

以上より

$$(m, n) = (7, 7), (49, 7), (24, 12), (72, 12), (45, 15), (75, 15), (64, 16) \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

← m については2次方程式、 n については3次方程式です。次数の低い m についての方程式をみましよう。

← n の範囲が絞られた。

← n の値が決まった。

← n の値が決まれば、 m の値も決まる。