定数 p は素数とし，条件

$$a(ab-p^2)=c^2, \quad b \leqq 2c$$

をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．a が素数であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ．

(2) $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 となるような自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を，p を用いて表せ．

(17 東京慈恵医大 3)

【答】

(1) $2p-1$

(2) $2p-2$

【解答】

$$a(ab-p^2)=c^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$b \leqq 2c \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) ①において，a は素数より，右辺の c^2 すなわち c は a の倍数である．したがって

$$c=ak\ (k \text{ は自然数})$$

とおける．このとき

$$① \iff ab-p^2=ak^2 \iff a(b-k^2)=p^2 \qquad \cdots\cdots ①'$$

p^2 すなわち p は素数 a の倍数である．さらに，p は素数であるから

$$a=p$$

である．これより

$$c=pk$$

である．また

$$①' \iff p(b-k^2)=p^2$$

$$\therefore \quad b=k^2+p$$

である．したがって

$$(a,\ b,\ c)=\left(p,\ k^2+p,\ pk\right) \qquad \cdots\cdots ①''$$

であり，k の個数が組 $(a,\ b,\ c)$ の個数でもある．

次に，②について考える．①$''$ より

$$② \iff k^2+p \leqq 2pk \iff k^2-2pk+p \leqq 0$$

解の公式を使って不等式を解くと

$$p-\sqrt{p^2-p} \leqq k \leqq p+\sqrt{p^2-p} \qquad \cdots\cdots ②'$$

ここで，$(p-1)^2<p(p-1)<p^2$ より，$p-1<\sqrt{p^2-p}<p$ であり

$$p-p<p-\sqrt{p^2-p}<p-(p-1) \qquad \therefore \quad 0<p-\sqrt{p^2-p}<1$$

$$p+(p-1)<p+\sqrt{p^2-p}<p+p \qquad \therefore \quad 2p-1<p+\sqrt{p^2-p}<2p$$

よって，②$'$ を満たす自然数 k は

$$1 \leqq k \leqq 2p-1$$

の $2p-1$ 個あるから，組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

$$\boldsymbol{2p-1} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

(2) ①$''$ より，a と c の最大公約数は p であるから，$a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 となる条件は

b が p の倍数でないこと

すなわち

k が p の倍数でないこと

である．したがって，$1 \leqq k \leqq 2p-1$ から $k=p$ を除いた $2p-2$ 個が条件を満たす．

よって，条件を満たす組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は

$$\boldsymbol{2p-2} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．