

定数  $p$  は素数とし、条件

$$a(ab - p^2) = c^2, \quad b \leq 2c$$

をみたす自然数の組  $(a, b, c)$  を考える.  $a$  が素数であるとき、次の問いに答えよ.

- (1) 自然数の組  $(a, b, c)$  の個数を、 $p$  を用いて表せ.  
 (2)  $a, b, c$  の最大公約数が 1 となるような自然数の組  $(a, b, c)$  の個数を、 $p$  を用いて表せ.

(17 年 東京慈恵医大 3)

- (1)  $2p - 1$   
 (2)  $2p - 2$

### 【チェック・チェック】

与えられた等式から両辺の約数を手繰り寄せていきます. このとき、 $a, p$  が素数という条件が効いてきます. 整数ばい問題ですね.

与えられた等式から  $a, b, c$  の関係式が得られ、不等式から  $a, b, c$  の動く範囲が絞られ、組  $(a, b, c)$  の個数が決まります.

#### 【解答】

$$a(ab - p^2) = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b \leq 2c \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(1)  $\textcircled{1}$ において、 $a$  は素数より、右辺の  $c^2$  すなわち  $c$  は  $a$  の倍数である. したがって

$$c = ak \quad (k \text{ は自然数})$$

とおける. このとき

$$\textcircled{1} \iff ab - p^2 = ak^2 \iff a(b - k^2) = p^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}'$$

$p^2$  すなわち  $p$  は素数  $a$  の倍数である. さらに、 $p$  は素数であるから

$$a = p$$

である. これより

$$c = pk$$

である. また

$$\textcircled{1}' \iff p(b - k^2) = p^2$$

$$\therefore b = k^2 + p$$

である. したがって

$$(a, b, c) = (p, k^2 + p, pk) \quad \dots\dots \textcircled{1}''$$

であり、 $k$  の個数が組  $(a, b, c)$  の個数でもある.

次に、 $\textcircled{2}$ について考える.  $\textcircled{1}''$  より

$$\textcircled{2} \iff k^2 + p \leq 2pk \iff k^2 - 2pk + p \leq 0$$

解の公式を使って不等式を解くと

$$p - \sqrt{p^2 - p} \leq k \leq p + \sqrt{p^2 - p} \quad \dots\dots \textcircled{2}'$$

ここで、 $(p-1)^2 < p(p-1) < p^2$  より、 $p-1 < \sqrt{p^2 - p} < p$  で

←  $a$  が素数であることを利用して、両辺の約数を手繰り寄せていく.

← 今度は、左辺の  $a$ 、右辺の  $p$  が素数です.

←  $a, b, c$  が定数  $p$  と変数  $k$  で表された!!

← 自然数  $k$  の動く範囲を絞りたい.

あり

$$p - p < p - \sqrt{p^2 - p} < p - (p - 1)$$

$$\therefore 0 < p - \sqrt{p^2 - p} < 1$$

$$p + (p - 1) < p + \sqrt{p^2 - p} < p + p$$

$$\therefore 2p - 1 < p + \sqrt{p^2 - p} < 2p$$

よって、②' を満たす自然数  $k$  は

$$1 \leq k \leq 2p - 1$$

の  $2p - 1$  個あるから、組  $(a, b, c)$  の個数は

$$2p - 1$$

……(答)

である.

(2) ①'' より、 $a$  と  $c$  の最大公約数は  $p$  であるから、 $a, b, c$  の最大公約数が 1 となる条件は

$b$  が  $p$  の倍数でないこと

すなわち

$k$  が  $p$  の倍数でないこと

である. したがって、 $1 \leq k \leq 2p - 1$  から  $k = p$  を除いた  $2p - 2$  個が条件を満たす.

よって、条件を満たす組  $(a, b, c)$  の個数は

$$2p - 2$$

……(答)

である.

← 2 数の最大公約数が 1 であるとは、2 数の共通な約数は 1 のみということです.