

自然数 n の正の約数のうち、2番目に大きいものを $\langle n \rangle$ と表す。ただし、 $2 \leq n \leq 100$ とする。たとえば、 $\langle 5 \rangle = 1$ 、 $\langle 9 \rangle = 3$ である。次の問いに答えよ。

- (1) $\sum_{k=2}^8 \langle k \rangle$ を求めよ。
 (2) $\sum_{k=2}^{20} \langle 3k \rangle$ を求めよ。
 (3) $\langle n \rangle = 7$ を満たす n をすべて求めよ。
 (4) $\langle n^2 \rangle = n$ ならば、 $\langle n \rangle = 1$ であることを証明せよ。

(17 立命館大 全学統一文系 2月2日 3)

【答】

- (1) 13
 (2) 264
 (3) 14, 21, 35, 49
 (4) 略

【解答】

- (1) $\langle n \rangle$ は自然数 n の正の約数のうちの 2 番目に大きいものであるから

k	2	3	4	5	6	7	8
$\langle k \rangle$	1	1	2	1	3	1	4

であり、求める和は

$$\sum_{k=2}^8 \langle k \rangle = 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 = 13 \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) 自然数 n ($2 \leq n \leq 100$) が³

$$n = a^p b^q \cdots c^r \quad (2 \leq a < b < \cdots < c; p, q, \dots, r \text{ は自然数})$$

と素因数分解されるとき、 n の正の約数のうちの 2 番目に大きいものは

$$\frac{n}{a} (= a^{p-1} b^q \cdots c^r)$$

である。自然数 $3k$ の正の約数のうち、最小な素因数 a (≥ 2) は、 k が偶数のときは 2 であり、 k が偶数でないときは 3 であるから、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{20} \langle 3k \rangle &= \sum_{j=1}^{10} \langle 3 \cdot 2j \rangle + \sum_{j=2}^{10} \langle 3 \cdot (2j-1) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{10} \frac{3 \cdot 2j}{2} + \sum_{j=2}^{10} \frac{3 \cdot (2j-1)}{3} \\ &= \sum_{j=1}^{10} (3j) + \sum_{j=2}^{10} (2j-1) \\ &= 3 \cdot \frac{10(1+10)}{2} + \frac{9(3+19)}{2} \\ &= 165 + 99 \\ &= 264 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

- 和の計算を次のようにしてもよい.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{10} (3j) + \sum_{j=2}^{10} (2j-1) &= \sum_{j=1}^{10} \{(3j) + (2j-1)\} - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{10} (5j-1) - 1 = \frac{10(4+49)}{2} - 1 \\ &= 265 - 1 = 264 \end{aligned}$$

- (3) 自然数 n ($2 \leq n \leq 100$) の正の約数のうち、最小な素因数を a (≥ 2) とすると

$$\langle n \rangle = \frac{n}{a} \quad \therefore n = a \langle n \rangle$$

であるから、 $\langle n \rangle = 7$ のとき、素因数 a は $2 \leq a \leq 7$ を満たすから

$$a = 2, 3, 5, 7$$

であり

$$\begin{aligned} n &= 2 \cdot 7, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7, 7 \cdot 7 \\ &= \mathbf{14, 21, 35, 49} \end{aligned}$$

……(答)

である.

- (4) 自然数 n^2 ($2 \leq n \leq 100$) の正の約数のうち、最小な素因数を a' (≥ 2) とすると、 $\langle n^2 \rangle = \frac{n^2}{a'}$ より、 $\langle n^2 \rangle = n$ ならば

$$n = \frac{n^2}{a'} \quad \therefore n = a'$$

a' は素数より、 n も素数であり、 $\langle n \rangle = 1$ である.

……(証明終わり)