自然数 n の正の約数のうち，2 番目に大きいものを $\langle\!\langle n\rangle\!\rangle$ と表す．ただし，$2 \leqq n \leqq 100$ とする．たとえば，$\langle\!\langle 5\rangle\!\rangle = 1$, $\langle\!\langle 9\rangle\!\rangle = 3$ である．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{8} \langle\!\langle k\rangle\!\rangle$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{20} \langle\!\langle 3k\rangle\!\rangle$ を求めよ．

(3) $\langle\!\langle n\rangle\!\rangle = 7$ を満たす n をすべて求めよ．

(4) $\langle\!\langle n^2\rangle\!\rangle = n$ ならば，$\langle\!\langle n\rangle\!\rangle = 1$ であることを証明せよ．

(17 年 立命館大 全学統一 文系 2 月 2 日 3)

(1) 13
(2) 264
(3) 14, 21, 35, 49
(4) 略

【チェック・チェック】

2 番目に大きい約数を扱った問題．

「2 番目に大きい」ということを式で表すことができるかどうかが分かれ目でしょう．(1) で 2 番目に大きいを並べてみて，これを一般化します．教えられると当り前のことでしょうが，これを自分で発見することが大切です．

(2) は $\langle\!\langle 3k\rangle\!\rangle$ という値が絶妙です．$\langle\!\langle 2k\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 4k\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 6k\rangle\!\rangle$ だとつまらない．$\langle\!\langle 5k\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 7k\rangle\!\rangle$ だと場合分けが増えるだけ．

【解答】

(1) $\langle\!\langle n\rangle\!\rangle$ は自然数 n の正の約数のうちの 2 番目に大きいものであるから

k	2	3	4	5	6	7	8
$\langle\!\langle k\rangle\!\rangle$	1	1	2	1	3	1	4

←― まずは $\langle\!\langle k\rangle\!\rangle$ のすべてを並べてみましょう．

であり，求める和は

$$\sum_{k=2}^{8} \langle\!\langle k\rangle\!\rangle = 1+1+2+1+3+1+4 = \mathbf{13} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 自然数 n $(2 \leqq n \leqq 100)$ が

$$n = a^p b^q \cdots c^r$$
$$(2 \leqq a < b < \cdots < c;\ p,\ q,\ \cdots,\ r \text{は自然数})$$

と素因数分解されるとき，n の正の約数のうちの 2 番目に大きいものは

$$\frac{n}{a} \left(= a^{p-1} b^q \cdots c^r\right)$$

である．

$\langle\!\langle n\rangle\!\rangle$を一般化します．1 番小さい約数は 1 であり，$a$ は 2 番目に小さい約数です．

自然数 $3k$ の正の約数のうち，最小な素因数 a $(\geqq 2)$ は，k が偶数のときは 2 であり，k が偶数でないときは 3 であるから，求める和は

←― 「$3k$」という値が絶妙です．
これにより，2 番目に小さい約数は 2 または 3 に限られます．

$$\sum_{k=2}^{20}\langle\!\langle 3k\rangle\!\rangle=\sum_{j=1}^{10}\langle\!\langle 3\cdot 2j\rangle\!\rangle+\sum_{j=2}^{10}\langle\!\langle 3\cdot(2j-1)\rangle\!\rangle$$
$$=\sum_{j=1}^{10}\frac{3\cdot 2j}{2}+\sum_{j=2}^{10}\frac{3\cdot(2j-1)}{3}$$
$$=\sum_{j=1}^{10}(3j)+\sum_{j=2}^{10}(2j-1)$$
$$=3\cdot\frac{10(1+10)}{2}+\frac{9(3+19)}{2}$$

$\longleftarrow$ $\sum(1$ 次式$)$ $=$ (等差数列の和)

$$=165+99$$
$$=\mathbf{264}$$
……(答)

- 和の計算を次のようにしてもよい.

$$\sum_{j=1}^{10}(3j)+\sum_{j=2}^{10}(2j-1)=\sum_{j=1}^{10}\{(3j)+(2j-1)\}-1$$

$\longleftarrow$ 和を 1 つにまとめた.

$$=\sum_{j=1}^{10}(5j-1)-1=\frac{10(4+49)}{2}-1$$
$$=265-1=264$$

(3) 自然数 n $(2\leqq n\leqq 100)$ の正の約数のうち，最小な素因数を a $(\geqq 2)$ とすると

$$\langle\!\langle n\rangle\!\rangle=\frac{n}{a}\qquad\therefore\quad n=a\langle\!\langle n\rangle\!\rangle$$

であるから，$\langle\!\langle n\rangle\!\rangle=7$ のとき，素因数 a は $2\leqq a\leqq 7$ を満たすから

$\longleftarrow$ a は 2 以上 $\langle\!\langle n\rangle\!\rangle$ 以下の素数である.

$$a=2,\ 3,\ 5,\ 7$$

であり

$$n=2\cdot 7,\ 3\cdot 7,\ 5\cdot 7,\ 7\cdot 7$$
$$=\mathbf{14,\ 21,\ 35,\ 49}$$
……(答)

である.

(4) 自然数 n^2 $(2\leqq n\leqq 100)$ の正の約数のうち，最小な素因数を a' $(\geqq 2)$ とすると，$\langle\!\langle n^2\rangle\!\rangle=\dfrac{n^2}{a'}$ より，$\langle\!\langle n^2\rangle\!\rangle=n$ ならば

$$n=\frac{n^2}{a'}\qquad\therefore\quad n=a'$$

a' は素数より，n も素数であり，$\langle\!\langle n\rangle\!\rangle=1$ である.

……(証明終わり)