n を 0 以上の整数とする．$x_n = 2\cos\dfrac{2n}{17}\pi$ のとき以下の問いに答えよ．

(1) $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ とするとき，$x_1(s+1) = 2s+2$ となることを示せ．

(2) $t = x_1 + x_2 + x_4 + x_8$ とするとき，$t^2 + t - 4 = 0$ となることを示せ．

(3) $x_1 + x_4$ の値を求めよ．

(17 京都府大 生命環境 (環境・情報) 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $x_1 + x_4 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{2}}$

【解答】

(1) $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ より

$$\begin{aligned} x_1(s+1) &= x_1 + \sum_{k=1}^{8} x_1 x_k \\ &= x_1 + \sum_{k=1}^{8}\left(2\cos\frac{2}{17}\pi \cdot 2\cos\frac{2k}{17}\pi\right) \end{aligned}$$

積和の公式 $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$ を用いると

$$\begin{aligned} x_1(s+1) &= x_1 + 2\sum_{k=1}^{8}\left\{\cos\frac{2(k+1)}{17}\pi + \cos\frac{2(k-1)}{17}\pi\right\} \\ &= x_1 + 2\sum_{k=1}^{8}\cos\frac{2(k+1)}{17}\pi + 2\sum_{k=1}^{8}\cos\frac{2(k-1)}{17}\pi \\ &= x_1 + (x_2 + x_3 + \cdots + x_8 + x_9) + (2 + x_1 + x_2 + \cdots + x_7) \\ &= 2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_7) + x_8 + x_9 \end{aligned}$$

$x_9 = 2\cos\dfrac{18}{17}\pi = 2\cos\left(2\pi - \dfrac{18}{17}\pi\right) = 2\cos\dfrac{16}{17}\pi = x_8$ より

$$\begin{aligned} x_1(s+1) &= 2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_7) + x_8 + x_8 \\ &= 2 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_8) \\ &= 2s + 2 \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

- $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{17} + i\sin\dfrac{2\pi}{17}$ とおく．ド・モアブルの定理より，$\alpha^n = \cos\dfrac{2n}{17}\pi + i\sin\dfrac{2n}{17}\pi$ であるから

$$\alpha^n + \overline{\alpha^n} = 2\cos\frac{2n}{17}\pi$$

である．また，$|\alpha^n| = 1$ より

$$\alpha^n\overline{\alpha^n} = 1 \qquad \therefore \quad \overline{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

したがって

$$x_n = 2\cos\frac{2n}{17}\pi = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$$

である．これより

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 + \cdots + x_8 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + \cdots + \left(\alpha^8 + \frac{1}{\alpha^8}\right) \\ &= \alpha^8 + \cdots + \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^8} \\ &= \frac{(\alpha^{16} + \cdots + \alpha^{10} + \alpha^9) + (\alpha^7 + \alpha^6 + \cdots + 1)}{\alpha^8} \end{aligned}$$

一方，$\alpha^{17} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$ であるから

$$\alpha^{17} - 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^{16} + \alpha^{15} + \cdots + \alpha + 1) = 0$$

$\alpha = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17} \neq 1$ より

$$\alpha^{16} + \alpha^{15} + \cdots + \alpha + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

㋐より

$$s = \frac{-\alpha^8}{\alpha^8} = -1 \qquad \therefore \quad s + 1 = 0$$

$x_1(s+1) = 2s + 2$ を示すには，$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} \neq 2$ より，$s + 1 = 0$ を示せばよいから，題意の等式は示された．

(2) $t = x_1 + x_2 + x_4 + x_8$ のとき

$$\begin{aligned} & t^2 + t - 4 \\ =& (x_1 + x_2 + x_4 + x_8)^2 + (x_1 + x_2 + x_4 + x_8) - 4 \\ =& {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_4}^2 + {x_8}^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_4 + x_1x_8 + x_2x_4 + x_2x_8 + x_4x_8) \\ & + (x_1 + x_2 + x_4 + x_8) - 4 \end{aligned}$$

積和の公式より

$$\begin{aligned} x_kx_l &= 2\cos\frac{2k}{12}\pi \cdot 2\cos\frac{2l}{12}\pi \\ &= 2\left\{\cos\frac{2(l+k)}{17}\pi + \cos\frac{2(l-k)}{17}\pi\right\} \\ &= x_{l+k} + x_{l-k} \end{aligned}$$

したがって，$k - l$ のときは

$$ {x_k}^2 = x_{2k} + x_0 = x_{2k} + 2$$

である．これより

$$\begin{aligned}
&t^2+t-4\\
=&(x_2+2)+(x_4+2)+(x_8+2)+(x_{16}+2)\\
&+2\{(x_3+x_1)+(x_5+x_3)+(x_9+x_7)+(x_6+x_2)+(x_{10}+x_6)+(x_{12}+x_4)\}\\
&+(x_1+x_2+x_4+x_8)-4\\
=&(x_2+x_4+x_8+x_{16}+8)\\
&+2(x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5+2x_6+x_7+x_9+x_{10}+x_{12})\\
&+(x_1+x_2+x_4+x_8)-4\\
=&3x_1+4x_2+4x_3+4x_4+2x_5+4x_6+2x_7+2x_8+2x_9+2x_{10}+2x_{12}+x_{16}+4
\end{aligned}$$

$x_k=2\cos\dfrac{2k}{17}\pi=2\cos\left(2\pi-\dfrac{2k}{17}\pi\right)=2\cos\dfrac{2(17-k)}{17}\pi=x_{17-k}$ も用いると

$$\begin{aligned}
&t^2+t-4\\
=&3x_1+4x_2+4x_3+4x_4+2x_5+4x_6+2x_7+2x_8+(2x_8+2x_7+2x_5+x_1)+4\\
=&4(1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)\\
=&4(1+s)\\
=&0\quad(\because\ (1))
\end{aligned}$$

……(証明終わり)

(3) (2) の方程式 $t^2+t-4=0$ を解くと

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

である．

$$t=x_1+x_2+x_4+x_8=2\left(\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}\right)$$

において

$$1>\cos\frac{2\pi}{17}>\cos\frac{4\pi}{17}>\cos\frac{8\pi}{17}>0,\ \ -1<\cos\frac{16\pi}{17}<0$$

より，$t>2(0+0+0-1)=-2$ であるから

$$t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$u=x_1+x_4,\ v=x_2+x_8$ とおくと

$$u+v=x_1+x_4+x_2+x_8=t=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned}
uv&=(x_1+x_4)(x_2+x_8)\\
&=x_1x_2+x_1x_8+x_4x_2+x_4x_8\\
&=(x_3+x_1)+(x_9+x_7)+(x_6+x_2)+(x_{12}+x_4)\\
&=x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_7+x_9+x_{12}\\
&=x_1+x_2+x_3+x_4+x_6+x_7+(x_8+x_5)\\
&=s\\
&=-1
\end{aligned}$$

$u,\ v$ は

$$X^2-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}X-1=0$$

の解であるから

$$X = \frac{1}{2}\left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 4\cdot(-1)}\right\}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}$$

$x_1 > x_2$ かつ $x_4 > x_8$ より $u = x_1 + x_4 > x_2 + x_8 = v$ であるから

$$x_1 + x_4 = u = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

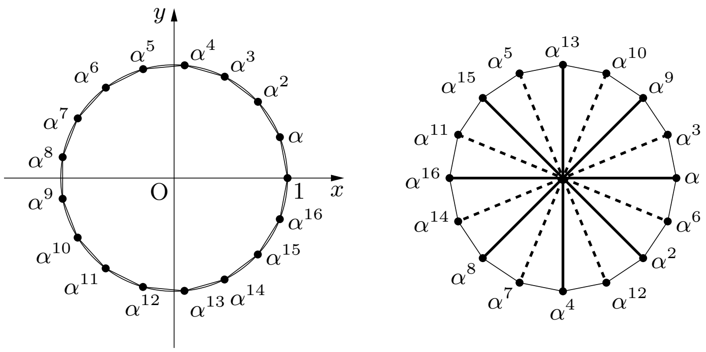
- ガウスの方法で分解方程式をつくりながら，α の値を求めてみよう．

  $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{17} + i\sin\dfrac{2\pi}{17}$ とおくと，α, α^2, $\cdots$, α^{16} は

  $z^{16} + z^{15} + \cdots + z + 1 = 0$

  の解である．$\alpha^{17} = 1$ に注意して，解を 3 乗することを繰り返すと

$$\alpha \longrightarrow \alpha^3 \longrightarrow \alpha^9 \longrightarrow \alpha^{27}(=\alpha^{10}) \longrightarrow \alpha^{30}(=\alpha^{13}) \longrightarrow \alpha^{39}(=\alpha^5)$$
$$\longrightarrow \alpha^{15} \longrightarrow \alpha^{45}(=\alpha^{11}) \longrightarrow \alpha^{33}(=\alpha^{16}) \longrightarrow \alpha^{48}(=\alpha^{14}) \longrightarrow \alpha^{42}(=\alpha^8)$$
$$\longrightarrow \alpha^{24}(=\alpha^7) \longrightarrow \alpha^{21}(=\alpha^4) \longrightarrow \alpha^{12} \longrightarrow \alpha^{36}(=\alpha^2) \longrightarrow \alpha^6$$
$$\longrightarrow \alpha^{18}(=\alpha)$$



頭の中で描いた正 16 角形の頂点に α, α^3, α^9, $\cdots$, α^6 をこの順に反時計回りに並べたとき,「3 乗する」ということは「正 16 角形の中心のまわりの $\dfrac{\pi}{8}$ 回転」することに対応している．

向かい合う 2 点からつくられる和

$$u_1 = (\alpha + \alpha^{16}) + (\alpha^9 + \alpha^8) + (\alpha^{13} + \alpha^4) + (\alpha^{15} + \alpha^2)$$
$$v_1 = (\alpha^3 + \alpha^{14}) + (\alpha^{10} + \alpha^7) + (\alpha^5 + \alpha^{12}) + (\alpha^{11} + \alpha^6)$$

を解とする 2 次方程式をつくる．

$$u_1 + v_1 = \alpha^{16} + \alpha^{15} + \cdots + \alpha = -1$$

$$\begin{aligned}
u_1v_1 =&(\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{13}+\alpha^{9}+\alpha^{8}+\alpha^{4}+\alpha^{2}+\alpha) \\
&\times(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
=&\alpha^{16}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha^{15}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha^{13}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha^{9}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha^{8}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha^{4}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha^{2}(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
&+\alpha(\alpha^{14}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{3}) \\
=&(\alpha^{13}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{9}+\alpha^{6}+\alpha^{5}+\alpha^{4}+\alpha^{2}) \\
&+(\alpha^{12}+\alpha^{10}+\alpha^{9}+\alpha^{8}+\alpha^{5}+\alpha^{4}+\alpha^{3}+\alpha) \\
&+(\alpha^{10}+\alpha^{8}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{3}+\alpha^{2}+\alpha+\alpha^{16}) \\
&+(\alpha^{6}+\alpha^{4}+\alpha^{3}+\alpha^{2}+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{14}+\alpha^{12}) \\
&+(\alpha^{5}+\alpha^{3}+\alpha^{2}+\alpha+\alpha^{15}+\alpha^{14}+\alpha^{13}+\alpha^{11}) \\
&+(\alpha+\alpha^{16}+\alpha^{15}+\alpha^{14}+\alpha^{11}+\alpha^{10}+\alpha^{9}+\alpha^{7}) \\
&+(\alpha^{16}+\alpha^{14}+\alpha^{13}+\alpha^{12}+\alpha^{9}+\alpha^{8}+\alpha^{7}+\alpha^{5}) \\
&+(\alpha^{15}+\alpha^{13}+\alpha^{12}+\alpha^{11}+\alpha^{8}+\alpha^{7}+\alpha^{6}+\alpha^{4}) \\
=&4(\alpha^{16}+\alpha^{15}+\cdots+\alpha) \\
=&-4
\end{aligned}$$

より，u_1，v_1 は

$$t^2+t-4=0 \text{ の解 } t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

である．複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ で表すと

$$u_1=2\mathrm{Re}(\alpha)+2\mathrm{Re}(\alpha^8)+2\mathrm{Re}(\alpha^4)+2\mathrm{Re}(\alpha^2)>2(0-1+0+0)=-2$$

より

$$u_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ v_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

である．

次に，$u_2=(\alpha+\alpha^{16})+(\alpha^{13}+\alpha^4)$，$v_2=(\alpha^9+\alpha^8)+(\alpha^{15}+\alpha^2)$ を解とする 2 次方程式をつくる．

$$u_2+v_2=u_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
u_2v_2 =&(\alpha^{16}+\alpha^{13}+\alpha^4+\alpha)(\alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^8+\alpha^2)\\
=&\alpha^{16}(\alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^8+\alpha^2)\\
&+\alpha^{13}(\alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^8+\alpha^2)\\
&+\alpha^4(\alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^8+\alpha^2)\\
&+\alpha(\alpha^{15}+\alpha^9+\alpha^8+\alpha^2)\\
=&(\alpha^{14}+\alpha^8+\alpha^7+\alpha)\\
&+(\alpha^{11}+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^{15})\\
&+(\alpha^2+\alpha^{13}+\alpha^{12}+\alpha^6)\\
&+(\alpha^{16}+\alpha^{10}+\alpha^9+\alpha^3)\\
=&\alpha^{16}+\alpha^{15}+\cdots+1\\
=&-1
\end{aligned}
$$

より，u_2，v_2 は

$$t^2-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}t-1=0 \text{ の解 } t=\frac{-1+\sqrt{17}\pm\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

である．

$$u_2=2\mathrm{Re}(\alpha)+2\mathrm{Re}(\alpha^4),\ v_2=2\mathrm{Re}(\alpha^2)+2\mathrm{Re}(\alpha^8)$$

であり，$u_2>v_2$ より

$$u_2=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4},\ v_2=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}$$

である．

同じく，$u'_2=(\alpha^3+\alpha^{14})+(\alpha^5+\alpha^{12})$，$v'_2=(\alpha^{10}+\alpha^7)+(\alpha^{11}+\alpha^6)$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}t-1=0$$

の解であり

$$u'_2=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4},\quad v'_2=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}$$

である．

さらに，$u_3=\alpha+\alpha^{16}$，$v_3=\alpha^{13}+\alpha^4$ を解とする 2 次方程式をつくる．

$$u_3+v_3=u_2\left(=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)$$

$$
\begin{aligned}
u_3v_3&=(\alpha+\alpha^{16})(\alpha^{13}+\alpha^4)=\alpha^{14}+\alpha^5+\alpha^{12}+\alpha^3\\
&=u'_2\left(=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right)
\end{aligned}
$$

より，u_3，v_3 は

$$t^2-u_2t+u_2{}'=0$$

の解である．

$$t=\frac{u_2\pm\sqrt{u_2{}^2-4u_2{}'}}{2}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
{u_2}^2 - 4{u_2}' &= (\alpha^{16} + \alpha^{13} + \alpha^4 + \alpha)^2 - 4{u_2}' \\
&= \alpha^{15} + \alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^2 + 2(\alpha^{12} + \alpha^3 + 1 + 1 + \alpha^{14} + \alpha^5) - 4{u_2}' \\
&= v_2 + 2({u_2}' + 2) - 4{u_2}' \\
&= v_2 - 2{u_2}' + 4
\end{aligned}
$$

$u_3 = 2\mathrm{Re}(\alpha)$，$v_3 = 2\mathrm{Re}(\alpha^4)$ より，$u_3 > v_3$ であるから

$$
u_3 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
$$

$$
v_3 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
$$

である．$\mathrm{Re}(\alpha) = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{\alpha + \alpha^{16}}{2}$ は正 17 角形を作図するときの要となる値である．

同じく，${u_3}' = \alpha^2 + \alpha^{15}$，${v_3}' = \alpha^8 + \alpha^9$ を解とする方程式は

$$
t^2 - v_2 t + {v_2}' = 0
$$

の解

$$
t = \frac{v_2 \pm \sqrt{{v_2}^2 - 4{v_2}'}}{2}
$$

である．

$$
{v_2}^2 - 4{v_2}' = u_2 - 2{v_2}' + 4, \quad {u_3}' > {v_3}'
$$

より

$$
{u_3}' = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{17 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
$$

$$
{v_3}' = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{17 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
$$

である．

最後に，α, α^{16} を解とする 2 次方程式をつくり，α を求めてみよう．

$$
\alpha + \alpha^{16} = u_3
$$

$$
\alpha\alpha^{16} = 1
$$

より，α, α^{16} は

$$
t^2 - u_3 t + 1 = 0
$$

の解であり

$$
t = \frac{u_3 \pm \sqrt{{u_3}^2 - 4}}{2}
$$

である．ここで

$$
{u_3}^2 - 4 = {u_3}' - 2, \quad \mathrm{Im}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Im}(\alpha^{16}) < 0
$$

より

$$
\begin{aligned}
\alpha =& \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{16} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\
&+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-17 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{17 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}
\end{aligned}
$$

である (大変な値になってしまった)．