$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を，$r>0$，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $z^4=2-2\sqrt{3}\,i$ が成り立つとき，r と θ を求めなさい．

(2) $\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}$ が実数となるような r と θ を求めなさい．

(3) $\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}$ が実数で，その値が 0 以上 3 以下であるような点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示しなさい．

(17 兵庫医大 医 3)

【答】

(1) $r=\sqrt{2}$，$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$

(2) $r=2$ または $\theta=0$

(3) 略

【解答】

(1) z は

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ r>0,\ 0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$$

を満たす複素数であり

$$2-2\sqrt{3}i=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

である．ド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}&z^4=2-2\sqrt{3}i\\ \Longleftrightarrow\ &r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$r>0,\ 0\leqq4\theta<2\pi$ より

$$\begin{cases}r^4=4\\ 4\theta=\dfrac{5\pi}{3}\end{cases}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{r=\sqrt{2},\quad \theta=\frac{5\pi}{12}}$$ ……(答)

(2) $\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}$ を極形式で表すと

$$\begin{aligned}\frac{z}{2}+\frac{2}{z}&=\frac{r}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{2}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\frac{r^2+4}{2r}\cos\theta+\left(\frac{r^2-4}{2r}\sin\theta\right)i\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{z}{2}+\frac{2}{z}\text{が実数になる}\ \Longleftrightarrow\ r^2-4=0\ \text{または}\ \sin\theta=0$$

$r>0$，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$\boldsymbol{r=2}$ **または** $\boldsymbol{\theta=0}$ ……(答)

- $\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}$ が実数になる条件は

$$
\begin{aligned}
&\overline{\frac{z}{2}+\frac{2}{z}}=\frac{z}{2}+\frac{2}{z}\\
&\frac{\overline{z}}{2}+\frac{2}{\overline{z}}=\frac{z}{2}+\frac{2}{z}\\
&\frac{\overline{z}-z}{2}+\frac{2(z-\overline{z})}{z\overline{z}}=0\\
&\frac{(\overline{z}-z)(z\overline{z}-4)}{2z\overline{z}}=0
\end{aligned}
$$

$z=\overline{z}$ または $z\overline{z}=4$ である．すなわち

z が実数 または $|z|=2$

である．

(3) $\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}$ が実数のとき，(2) より

$$\frac{z}{2}+\frac{2}{z}=\frac{r^2+4}{2r}\cos\theta$$

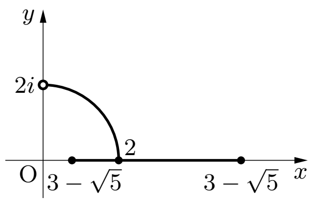
(i) $r=2$ のとき，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}=2\cos\theta$

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より $0 < 2\cos\theta \leqq 2$ だから $0 \leqq \dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z} \leqq 3$ を満たす.

(ii) $\theta=0$ のとき，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{2}{z}=\dfrac{r^2+4}{2r}$

$0 \leqq \dfrac{r^2+4}{2r} \leqq 3$ を解く．$0 \leqq \dfrac{r^2+4}{2r}$ はつねに成り立つから，$\dfrac{r^2+4}{2r} \leqq 3$ を解く．
$r>0$ より

$$
\begin{aligned}
&r^2-6r+4 \leqq 0\\
&3-\sqrt{5} \leqq r \leqq 3+\sqrt{5}
\end{aligned}
$$



(i), (ii) より，点 z は図の太線部分を描く．白丸を除き，黒丸を含む.