t を正の実数とする．t に対して，複素数 $\alpha = 2 + ti$ とし，α の共役な複素数を $\overline{\alpha}$ とする．方程式 $z^3 = -8$ の解で虚部が正のものを ω とする．複素数平面上の 3 点を $\mathrm{A}(\omega)$, $\mathrm{B}(\alpha\omega)$, $\mathrm{C}(\overline{\alpha}\omega)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) ω を極形式で表せ．ただし，ω の偏角 $\arg\omega$ は $0 \leqq \arg\omega < 2\pi$ とする．
(2) 線分 AB，AC の長さを t で表せ．
(3) 3 点 A，B，C を頂点とする $\triangle$ABC の外接円の半径を r とする．t が r 正の実数全体を動くとき，$\dfrac{r}{t}$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

(17 同志社大 政策・文情・生医・スポ 2)

【答】

(1) $\omega = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
(2) $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{1+t^2}$
(3) $t = 1$ のとき，最小値 2 をとる．

【解答】

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく．

$$z^3 = -8 \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r = 2,\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad (k\ \text{は整数})$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}$$

虚部が正のものが ω であるから

$$\omega = \mathbf{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathit{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $\alpha = 2 + ti$，$\mathrm{A}(\omega)$, $\mathrm{B}(\alpha\omega)$, $\mathrm{C}(\overline{\alpha}\omega)$ より

$$\mathrm{AB} = |\alpha\omega - \omega| = |\omega||\alpha - 1| = 2|1 + ti| = \mathbf{2\sqrt{1+t^2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\mathrm{AC} = |\overline{\alpha}\omega - \omega| = |\omega||\overline{\alpha} - 1| = 2|1 - ti| = \mathbf{2\sqrt{1+t^2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

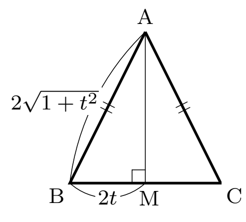
である．

(3) (2) と同じく

$$\mathrm{BC} = |\overline{\alpha}\omega - \alpha\omega| = |\omega||\overline{\alpha} - \alpha| = 2|-2ti| = 4t\ (\because\ t > 0)$$

BC の中点を M とすると AM$= 2$ であり，$\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ である．$\triangle$ABC の外接円の半径 r は正弦定理より

$$r = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = 1 + t^2$$



$t > 0$ より相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{r}{t} = \frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t} + t \geqq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot t} = 2$$

等号は $\dfrac{1}{t} = t$ のとき，すなわち $t = 1\ (>0)$ のとき成り立つ．

よって，$t = \mathbf{1}$ のとき最小値 $\mathbf{2}$ をとる． ……(答)

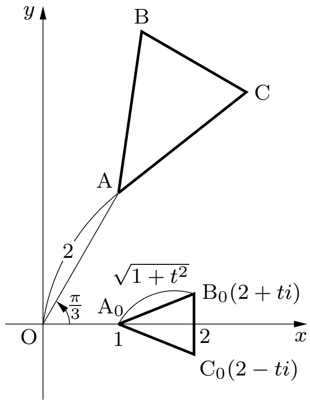
- (1) より $\omega = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であり，$z\omega$ は，z を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し原点を中心として 2 倍した点を表す複素数である．

  $\mathrm{A_0}(1)$，$\mathrm{B_0}(\alpha)$，$\mathrm{C_0}(\overline{\alpha})$ とおくと

  $$\mathrm{A_0B_0} = \mathrm{A_0C_0} = \sqrt{1+t^2}$$

  より

  $$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{1+t^2} \quad \cdots\cdots \text{((2) の答)}$$

  (3) についても，$\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ の外接円の半径を r_0 とおくと，正弦定理より

  $$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{A_0C_0}}{\sin\angle\mathrm{A_0B_0C_0}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \\ &= \frac{1+t^2}{2} \end{aligned}$$

  であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径 r は

  $$r = 2r_0 = 1 + t^2$$

  である．以下，解答と同じ．