t を正の実数とする．t に対して，複素数 $\alpha = 2 + ti$ とし，α の共役な複素数を $\overline{\alpha}$ とする．方程式 $z^3 = -8$ の解で虚部が正のものを ω とする．複素数平面上の 3 点を A(ω)，B$(\alpha\omega)$，C$(\overline{\alpha}\omega)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) ω を極形式で表せ．ただし，ω の偏角 $\arg\omega$ は $0 \leqq \arg\omega < 2\pi$ とする．
(2) 線分 AB，AC の長さを t で表せ．
(3) 3 点 A，B，C を頂点とする △ABC の外接円の半径を r とする．t が r 正の実数全体を動くとき，$\dfrac{r}{t}$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

(17 年 同志社大 政策・文情・生医・スポ 2)

(1) $\omega = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
(2) $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{1+t^2}$
(3) $t = 1$ のとき，最小値 2 をとる．

【チェック・チェック】

(1) $z^3 = -8$ は極形式の形で解いてもよいし，解いてから極形式に直してもよいでしょう．
(2)，(3) 3 点は A，B，C は t で表されるので，3 辺の長さは t で表すことができます．二等辺三角形であることを用いると角の情報もすぐに得られます．外接円の半径については正弦定理を利用しましょう．

【解答】

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおく．

$$z^3 = -8 \iff r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r = 2,\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$\theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$ かつ $0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}$$

虚部が正のものが ω であるから

$$\boldsymbol{\omega = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

← 極形式で表したい．

- $z^3 = -8 \iff (z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$
  より

$$z = -2,\ 1 \pm \sqrt{3}i$$

虚部が正のものが ω であるから

$$\omega = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

である．

← この方程式なら直接解くこともできます．(上の解法なら，$z^n = -8$ でも解くことができます．)

(2) $\alpha = 2 + ti$，A(ω)，B$(\alpha\omega)$，C$(\overline{\alpha}\omega)$ より

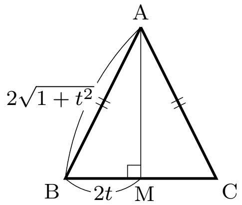
$$\mathrm{AB} = |\alpha\omega - \omega| = |\omega||\alpha - 1| = 2|1 + ti| = \boldsymbol{2\sqrt{1+t^2}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\mathrm{AC} = |\overline{\alpha}\omega - \omega| = |\omega||\overline{\alpha} - 1| = 2|1 - ti| = \boldsymbol{2\sqrt{1+t^2}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

← A(α)，B(β) 間の距離 AB は $\mathrm{AB} = |\beta - \alpha|$ であり，$z = a + bi$ (a，b は実数) のとき $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ である．

である．

(3) (2) と同じく



$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= |\overline{\alpha}\omega - \alpha\omega| = |\omega||\overline{\alpha} - \alpha| \\ &= 2|-2ti| \\ &= 4t \quad (\because\ t > 0)\end{aligned}$$

BC の中点を M とすると AM$=2$ であり，$\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ である．

二等辺三角形であることを利用して sin の値を得る．

△ABC の外接円の半径 r は正弦定理より

$$r = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = 1+t^2$$

⟵ 外接円の半径ときたら，正弦定理を考えましょう．

$t>0$ より相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{r}{t} = \frac{1+t^2}{t} = \frac{1}{t} + t \geqq 2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot t} = 2$$

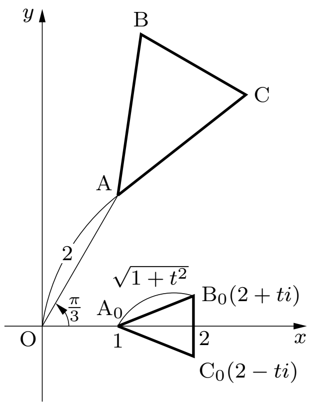
⟵ 和の最小値を求めたい．
和と積の不等式として，相加平均・相乗平均の関係式がある．

等号は $\dfrac{1}{t} = t$ のとき，すなわち $t=1\ (>0)$ のとき成り立つ．

等号成立の確認を忘れない．

よって，$t = \mathbf{1}$ のとき最小値 $\mathbf{2}$ をとる．　……(答)

- (1) より $\omega = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であり，$z\omega$ は，z を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し原点を中心として 2 倍した点を表す複素数である．



$\mathrm{A_0}(1)$，$\mathrm{B_0}(\alpha)$，$\mathrm{C_0}(\overline{\alpha})$ とおくと

⟵ $\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ を 2 倍に拡大したものが △ABC である．

$$\begin{aligned}\mathrm{A_0B_0} &= \mathrm{A_0C_0} \\ &= \sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{AC} \\ &= 2\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

…… ((2) の答)

(3) についても，$\triangle\mathrm{A_0B_0C_0}$ の外接円の半径を r_0 とおくと，正弦定理より

$$\begin{aligned}r_0 &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{A_0C_0}}{\sin\angle\mathrm{A_0B_0C_0}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{1+t^2}{2}\end{aligned}$$

であるから，△ABC の外接円の半径 r は

$$r = 2r_0 = 1+t^2$$

である．以下，解答と同じ．

- $t=1$ のとき，△ABC は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{2}$，$\mathrm{BC} = 4$ であり，これは $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である．